ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 112 2013 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.223

Г. М. Айрапетян, Л. В. Погосян

Граничная задача Римана – Гильберта для уравнения Бицадзе с граничными условиями из пространств мер

(Представлено академиком В.С.Захаряном 25/XII 2012)

Ключевые слова: *граничная задача, пространство мер, уравнение Бицадзе, слабая сходимость.*

1. Пусть $D^+ = \{z; |z|<1\}$ – единичный круг, $T=\{z; |z|=1\}$ – единичная окружность в комплексной плоскости $z=x+iy$, W – пространство мер, определенных на T, $W^{(1)} \subset W$ – подмножество абсолютно непрерывных мер на T, представимых в виде $d\mu_0 = =\varphi_0(e^{i\theta})d\theta$, где – φ_0 функция ограниченной вариации на T. В настоящей работе исследуется граничная задача типа Римана – Гильберта для уравнения

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}^2}=0, \quad z\in D^+, \tag{1}$$

в следующей постановке: определить функцию u, удовлетворяющую уравнению (1) так, чтобы выполнялись граничные условия

$$\lim_{r\to 1-0} \operatorname{Re} u(rt) = d\mu_0(t), \tag{2}$$

$$\lim_{r\to 1-0} \operatorname{Re} \frac{\partial u(rt)}{\partial r} = d\mu_1(t), \tag{3}$$

где $d\mu_0 \in W^{(1)}$, $d\mu_1 \in W$ – произвольные меры. Равенства (2), (3) понимаются в смысле слабой сходимости, т.е. для любой функции $g\in C(T)$ (непрерывной на T функции) имеет место

$$\lim_{r\to 1-0} \int_T g(t) \operatorname{Re} u(rt)dt = \int_T g(t) d\mu_0(t), \tag{2'}$$

$$\lim_{r\to 1-0}\int_T g(t)\operatorname{Re}\frac{\partial u(rt)}{\partial t}dt=\int_T g(t)d\mu_1(t). \tag{3'}$$

Следует отметить, что задача Дирихле для уравнения (1) не является нормально разрешимой. Задача Римана – Гильберта для уравнения (1) и для уравнений высокого порядка, когда граничные функции принадлежат классу Гельдера, в классической постановке исследована в работах [1-3]. Если граничные функции принадлежат классу L^1 эта задача исследована в работе [4]. Наконец отметим, что граничная задача Гильберта в классе W исследована в работе [5].

2. *Общее решение уравнения (1) можно представить в виде (см. [1])*

$$u(z)=\varphi_0(z)+(1-|z|^2)\varphi_1(z)+a_0\overline{z}, \tag{4}$$

где φ_0, φ_1 – произвольные аналитические функции в D^+, a_0 – произвольное комплексное число. Условия (2), (3) (или (2'), (3')) можно представить в виде

$$\lim_{r\to 1-0}\operatorname{Re}(\varphi_0(rt)+(1-r^2)\varphi_1(rt)+a_0r\overline{t})=d\mu_0(t)$$

$$\lim_{r\to 1-0}\operatorname{Re}(t\varphi_0'(rt)-2r\varphi_1(rt)+(1-r^2)t\varphi_1'(rt)+a_0\overline{t})=d\mu_1(t)$$

Положим

$$\operatorname{Re}(\varphi_0(rt)+(1-r^2)\varphi_1(rt)+a_0r\overline{t})=f_{0r}(t),$$

$$\operatorname{Re}(t\varphi_0'(rt)-2r\varphi_1(rt)+(1-r^2)t\varphi_1'(rt)+a_0\overline{t})=f_{1r}(t).$$

Так как f_{0r} и f_{1r} принадлежат классу Гельдера на T, то получаем

$$\varphi_0(rz)+(1-r^2)\varphi_1(rz)=\frac{1}{2\pi i}\int_T f_{0r}(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}-\overline{a}_0rz+ib_0,\ z\in D^+,$$

$$z\varphi_0'(rz)-2r\varphi_1(rz)+(1-r^2)\varphi_1'(rz)=\frac{1}{2\pi i}\int_T f_{1r}(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}-\overline{a}_0z+ib_1,\ z\in D^+,$$

где b_0, b_1 – произвольные действительные числа. Так как

$$\lim_{r\to 1-0}f_{0r}(t)=d\mu_0,\quad \lim_{r\to 1-0}f_{1r}(t)=d\mu_1,$$

в смысле слабой сходимости, то, переходя к пределу в последних равенствах, получаем

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{t+z}{t-z}d\mu_0(t)-\overline{a}_0z+ib_0,\ z\in D^+,$$

$$z\varphi_0'(z)-2\varphi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{t+z}{t-z}d\mu_1(t)-\overline{a}_0z+ib_1,\ z\in D^+.$$

Окончательно будем иметь

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{t+z}{t-z}d\mu_0(t)-\overline{a}_0z+ib_0,\ z\in D^+, \tag{5}$$

$$\varphi_1(z) = \frac{z}{4\pi i}\int_T \frac{d\mu_0(t)}{(t-z)^2} - \frac{1}{4\pi}\int_T \frac{t+z}{t-z} d\mu_1(t) + \frac{ib_1}{2},\ z \in D^+. \qquad (6)$$

Этим установлена

Теорема 1. *Если для заданных мер* $d\mu_0 \in W_a$, $d\mu_1 \in W$ *задача (1)-(3) имеет решение, то ее можно представить в виде (4), где функции* φ_0, φ_1 *определяются формулами (5), (6),* a_0 *– произвольное комплексное число, а* b_0, b_1 *– произвольные действительные числа.*

Из этой теоремы и из формул (5), (6) непосредственно следует, что если в условиях нашей задачи вместо мер $d\mu_0(t), d\mu_1(t)$ рассматривать функции из класса Гельдера, то решения этой задачи также будут принадлежать классу Гельдера в замкнутой области $\overline{\mathrm{D}}^+$.

3. Основная цель настоящей работы – установить, что для любых мер $d\mu_0 \in W_a$ и $d\mu_1 \in W$ функция $u(z)$, определенная формулой (4), удовлетворяет условиям (2), (3). Отдельно рассмотрим однородную задачу (1)-(3). Тогда граничные условия принимают следующий вид:

$$\lim_{r\to 1-0} \operatorname{Re} u(rt) = 0, \qquad (7)$$

$$\lim_{r\to 1-0} \operatorname{Re} \frac{\partial u(rt)}{\partial r} = 0 \qquad (8)$$

(сходимость понимается в смысле слабой сходимости).

Теорема 2. *Однородная задача (1), (7), (8) имеет четыре линейно независимых решения над полем действительных чисел. Общее решение этой задачи можно представить в виде*

$$u(z) = \varphi_0(z) + \left(1 - |z|^2\right)\varphi_1(z) + a_0\bar{z},$$

где

$$\varphi_0(z) = ib_0 - \bar{a}_0 z, \quad \varphi_1(z) = ib_1, \qquad (9)$$

причем b_0, b_1 *– произвольные действительные числа а* a_0 *– произвольное комплексное число*.

Доказательство. Из представлений (2), (3) функций φ_0, φ_1 при $d\mu_0(t) = 0$ и $d\mu_1(t) = 0$ получаем представления (9). Следовательно

$$u(z) = ib_0 + (1 - |z|^2)\frac{ib_1}{2} + a_0\bar{z},$$

и получаем равенство (7).

Лемма 1. *Пусть* $d\mu_0 \in W$ *– произвольная мера на* T. *Тогда*

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi}\int_T \frac{(1-r^2)}{(\tau - rt)^2} d\mu_0(\tau) = 0\ ,$$

где предел понимается в смысле слабой сходимости, т.е.

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_T g(t)\int_T\frac{(1-r^2)}{(\tau-rt)^2}d\mu_0(\tau)dt=0, \qquad (10)$$

для любой функции $g\in C(T)$.

Доказательство. Так как

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\int_T\frac{(1-r^2)}{(\tau-rt)^2}d\mu_0(\tau)\right\|_W\le\|d\mu_0\|_W \qquad (11)$$

и множество функций $g\in C^{1,\alpha}(T)$ всюду плотно в смысле слабой сходимости в W (см. [6]), то достаточно установить (10) при $g\in C^{1,\alpha}(T)$. Теперь, если $g\in C^{1,\alpha}(T)$, то (см. [7]) интеграл типа Коши от функции g удовлетворяет неравенству

$$\left|\int_T\frac{g(t)dt}{(\tau-rt)^2}\right|<C,$$

где C некоторая константа, не зависящая от $r\in(0,1)$. Поэтому

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_T g(t)\int_T\frac{(1-r^2)}{(\tau-rt)^2}d\mu_0(\tau)dt=0\ .$$

Теперь из оценки (11) следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть* $d\mu_0\in W^{(1)}$ *произвольная мера на* T. *Тогда*

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_T\frac{(1-r^2)}{(\tau-rt)^3}d\mu_0(\tau)=0,$$

где сходимость понимается в смысле слабой сходимости в W.

Доказательство. *Так как* $d\mu_0\in W_a$ *, то* $d\mu_0=\varphi_0(t)dt$ *, где функция* $\varphi_0(t)$ *определена на* T *и является функцией с ограниченной вариацией. Производя интегрирование по частям, будем иметь*

$$\frac{1}{2\pi}\int_T\frac{(1-r^2)}{(\tau-rt)^3}\varphi_0(\tau)d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_T\frac{(1-r^2)}{(\tau-rt)^2}d\varphi_0(\tau).$$

Применяя лемму 1, получаем доказательство леммы 2.

Теорема 3. *Пусть* $d\mu_0\in W_a$, $d\mu_1\in W$ *– произвольные меры на* T. *Тогда функция* $u(z)$ *из (4), где функции* φ_0,φ_1 *определяются формулами (5), (6), является решением граничной задачи (2), (3).*

Доказательство. Учитывая теорему 2, достаточно установить, что функция (4), когда

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int_T\frac{t+z}{t-z}d\mu_0(t),$$

$$\varphi_1(z)=\frac{z}{4\pi i}\int_T\frac{td\mu_0(t)}{(t-z)^2}-\frac{1}{4\pi}\int_T\frac{t+z}{t-z}d\mu_1(t),$$

удовлетворяет граничным условиям (2), (3). Действительно, так как

$$\operatorname{Re} u(rt)=\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{1-r^2}{|\tau-rt|^2}d\mu_0(\tau)+\operatorname{Re}\frac{rt}{4\pi}\int_T \frac{1-r^2}{(\tau-rt)^2}d\mu_0(\tau)-$$
$$-\operatorname{Re}\frac{1}{4\pi}\int_T \frac{(1-r^2)^2}{|\tau-rt|^2}d\mu_1(\tau),$$

То, учитывая, что

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{1-r^2}{|\tau-rt|^2}d\mu_0(\tau)=d\mu_0$$

в смысле слабой сходимости в W (см. [7]) и в силу леммы 1

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{rt(1-r^2)}{(\tau-rt)^2}d\mu_0(\tau)=0\,,\quad \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{4\pi}\int_T \frac{(1-r^2)^2}{|\tau-rt|^2}d\mu_0(\tau)=0$$

в смысле слабой сходимости, устанавливаем, что функция $u(z)$ удовлетворяет условию (2). Далее имеем

$$\frac{\partial u(rt)}{\partial r}=t\varphi_0'(rt)-2r\varphi_1(rt)+(1-r^2)\varphi_1'(rt)=$$
$$=\frac{(1-r^2)t}{2\pi}\int_T \frac{d\mu_0(\tau)}{(\tau-rt)^2}+\frac{r}{2\pi}\int_T \frac{\tau+rt}{\tau-rt}d\mu_1(\tau)+$$
$$\frac{(1-r^2)}{\pi i}\int_T \frac{\tau d\mu_0(\tau)}{(\tau-rt)^3}-\frac{1-r^2}{2\pi}\int_T \frac{d\mu_1(\tau)}{\left(\tau-rt\right)^2}.$$

Так как в силу лемм 1, 2

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{(1-r^2)t}{2\pi}\int_T \frac{d\mu_0(\tau)}{(\tau-rt)^2}=0\,,\qquad \lim_{r\to 1-0}\frac{(1-r^2)}{2\pi}\int_T \frac{d\mu_0(\tau)}{(\tau-rt)^3}=0$$
$$\lim_{r\to 1-0}\operatorname{Re}\frac{r}{2\pi}\int_T \frac{\tau+rt}{\tau-rt}d\mu_1(\tau)=d\mu_1(\tau),\qquad \lim_{r\to 1-0}\frac{1-r^2}{2\pi}\int_T \frac{d\mu_1(\tau)}{\left(\tau-rt\right)^2}=0,$$

где все пределы понимаются в слабой топологии пространства W, устанавливаем, что функция $u(z)$ удовлетворяет условию (3) задачи (1)-(3). Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Г. М.Айрапетян, Л. В. Погосян

Граничная задача Римана – Гильберта для уравнения Бицадзе с граничными условиями из пространств мер

Исследуется граничная задача Римана – Гильберта для уравнения Бицадзе $\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2}=0$ в единичном круге, где граничные условия – мера из пространства W на единичной окружности. Предполагается, что граничные условия – элементы из пространства мер на единичной окружности. Устанавливается, что эта задача нормально разрешима.

Հ. Մ. Հայրապետյան, Լ. Վ. Պողոսյան

Ռիման – Հիլբերտի եզրային խնդիրը Բիցաձեի հավասարման համար, երբ եզրային պայմանները պատկանում են չափերի տարածությանը

Ուսումնասիրված է Ռիման – Հիլբերտի եզրային խնդիրը $\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2}=0$ Բիցաձեի հավասարման համար, երբ եզրային պայմանները չափեր են միավոր շրջանագծի վրա: Ենթադրվում է, որ այդ պայմանները ընդունվում են թույլ զուգամիտության իմաստով: Ապացուցվում է, որ այդ խնդիրը նորմալ լուծելի է:

H. M. Hayrapetyan, L. V. Poghosyan

Riemann – Hilbert Problem for Bitsadze Equation with Boundary Conditions from Measure Space

The Riemann – Hilbert problem is considered for Bitsadze equation $\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2}=0$, where the boundary conditions are elements from space of finite measures. The boundary conditions are defined in sense of weak approximation. It is proved that this problem is normally-solvable.

Литература

1. *Бицадзе А. В.* - Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М. Наука. 1966. 206 с.
2. *Товмасян Н. Е., Айрапетян Г.М.*- В кн.: Тезисы докладов Северо-Кавказской региональной конференции. Грозный, 1989. С. 150-151.
3. *Солдатов А. П.* -В кн.: Тезисы докладов Северо-Кавказской региональной конференции. Грозный. 1989. С. 153-154.
4. *Айрапетян Г.М.* - Докл. РАН. 1993. Математика. Т. 328. N 3. С. 421-423.
5. *Айрапетян Г. М., Погосян Л. В.* - Избранные труды международной научной конференции. Нальчик, 26-30 сентября 2011. Ереван 2012. С. 62-72.
6. *Гофман К.* - Банаховы пространства аналитических функций. М. ИЛ. 1975. 311с.
7. *Мусхелишвили Н. И.* - Сингулярные интегральные уравнения. М. Наука. 1968. 511с.