ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 112 2012 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Р. М. Киракосян

# К уточненной теории термоупругости ортотропных оболочек переменной толщины

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 30/V 2012)

**Ключевые слова:** *уточненная теория, ортотропная оболочка, переменная толщина, поперечные сдвиги, температура*

Классической и уточненным теориям анизотропных пластин и оболочек, а также их многочисленным приложениям посвящена обширная литература ([1-11] и др.).

В настоящей статье по аналогии [9] строится уточненная теория гладких ортотропных оболочек переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов и температуры. Рассматривается также упрощенный (технический) вариант этой теории, предназначенный для пологих оболочек или замкнутых оболочек малой длины.

1. Рассмотрим гладкую оболочку, изготовленную из криволинейно-ортотропного линейно-упругого материала. Оболочку отнесем к системе криволинейных ортогональных координат $\alpha, \beta, \gamma$. Координатные линии $\alpha, \beta$ направлены по линиям главной кривизны срединной поверхности оболочки, которые параллельны главным направлениям анизотропии материала, а координатная линия $\gamma$ в любой точке перпендикулярна линиям $\alpha, \beta$ и составляет с ними правую систему. Считаем, что оболочка имеет переменную толщину $h(\alpha, \beta)$, симметричную относительно срединной поверхности $\gamma = 0$. Пусть на оболочку действуют поверхностные нагрузки, проекции которых на координатные линии составляют $X^{\pm}$, $Y^{\pm}$, $Z^{\pm}$. Знаками «+» и «–» будем отмечать величины, относящиеся к лицевым поверхностям оболочки $\gamma = +h/2$ и $-h/2$ соответственно. Считаем, что температура оболочки $\theta(\alpha, \beta, \gamma)$ отличается от температуры естес-

твенного состояния и кроме поверхностных сил действует еще и объемная сила произвольного характера с проекциями $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$.

По аналогии [9] воспользуемся методом представления решений в виде степенных многочленов по поперечной координате $\gamma$. Очевидно, что для построения самой простой теории, способной описать изгиб оболочки, в многочленах основных напряжений $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha,\beta}$ необходимо удержать лишь первые два члена, т.е. принимать для этих напряжений линейные законы распределения по толщине оболочки. Это влечет за собой линейность распределения по толщине оболочки основных деформаций $e_\alpha, e_\beta, e_{\alpha,\beta}$, а следовательно, и тангенциальных перемещений $u_\alpha, u_\beta$. Тогда для соблюдения одинакового порядка в многочленах поперечных касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}$ следует удержать по три члена. Итак, в качестве основной гипотезы примем

$$\tau_{\alpha\gamma} = \varphi_1 + \gamma\varphi_2 + \gamma^2\varphi_3, \quad \tau_{\beta\gamma} = \psi_1 + \gamma\psi_2 + \gamma^2\psi_3. \tag{1.1}$$

Здесь $\varphi_i$ и $\psi_i$ – функции координат $\alpha, \beta$.

Для распределения объемной силы по толщине оболочки примем линейную аппроксимацию.

Кроме (1.1) примем также следующие допущения:

а) прогиб $w$ по толщине оболочки не меняется;

б) влияние нормального напряжения $\sigma_\gamma$ не принимается во внимание.

Допущение а) можно обосновать следующим образом. В рамках геометрически линейной постановки

$$u_\gamma = w(\alpha, \beta) + \int_0^\gamma e_\gamma d\gamma \approx w. \tag{1.2}$$

Интегральным членом этого выражения пренебрегаем из-за малости не деформации $e_\gamma$, а промежутка интегрирования, поскольку $|\gamma| \le h/2$, а $h$ намного меньше остальных габаритных размеров оболочки. Важно заметить, что учет этого интегрального члена приводит к нарушению линейности распределения тангенциальных перемещений, а следовательно и основных напряжений по толщине оболочки, что существенно и неоправданно осложнит теорию.

В пользу же допущения б) свидетельствуют известные решения многих конкретных задач [2].

Из геометрически линейных соотношений с учетом обобщенного закона Гука и принятых допущений имеем [2]:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= (1 + k_1\gamma)u - \gamma\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - a_{55}\varphi_1\right), \\ u_\beta &= (1 + k_2\gamma)\mathrm{v} - \gamma\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} - a_{44}\psi_1\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь $u, \text{v}$ – тангенциальные перемещения, $k_1, k_2$ – кривизны, $A, B$ – коэффициенты первой квадратной формы срединной поверхности, $a_{44}, a_{55}$ – упругие постоянные материала оболочки.

Температуры поверхностей оболочки $\theta^+$ и $\theta^-$ считаем известными. Для распределения температуры по толщине оболочки примем линейный закон

$$\theta = \frac{\theta^+ + \theta^-}{2} + \frac{\gamma}{h}\left(\theta^+ - \theta^-\right). \tag{1.4}$$

На основе обобщенного закона Гука и гипотезы Франца Неймана [12] для основных напряжений оболочки получим:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= B_{11}\left(e_\alpha - \alpha_1\theta\right) + B_{12}\left(e_\beta - \alpha_2\theta\right), \\ \sigma_\beta &= B_{22}\left(e_\beta - \alpha_2\theta\right) + B_{12}\left(e_\alpha - \alpha_1\theta\right), \\ \tau_{\alpha\beta} &= B_{66}e_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь $B_{ij}$ – параметры материала, которые известными формулами [3] выражаются через упругие постоянные, $\alpha_1$ и $\alpha_2$ – коэффициенты теплового расширения по направлениям $\alpha$ и $\beta$ соответственно. Основные деформации имеют вид:

$$e_\alpha = \varepsilon_1 + \gamma\chi_1, \quad e_\beta = \varepsilon_2 + \gamma\chi_2, \quad e_{\alpha\beta} = \omega + \gamma\tau. \tag{1.6}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\text{v} + k_1 w, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B}\frac{\partial \text{v}}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u + k_2 w, \\ \omega &= \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\text{v}}{B}\right), \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} \chi_1 &= -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) - \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha}u + \frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial\beta}\text{v} - \\ &\quad - k_1^2 w + \frac{1}{AB}\left(Ba_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} + a_{44}\psi_1\frac{\partial A}{\partial\beta}\right), \\ \chi_2 &= -\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) - \frac{1}{A^2 B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial\beta}\text{v} + \frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha}u - \\ &\quad - k_2^2 w + \frac{1}{AB}\left(Aa_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta} + a_{55}\varphi_1\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right), \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\tau = -\frac{2}{AB}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) + \left(k_1 - k_2\right)\left[\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right) - \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\mathrm{v}}{B}\right)\right] +$$
$$+\frac{1}{AB}\left[a_{55}\left(A\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} - \varphi_1\frac{\partial A}{\partial\beta}\right) + a_{44}\left(B\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha} - \psi_1\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\right].$$

Следуя [2], для усилий и моментов оболочки, с учетом (1.4) и (1.5), получим:

$$T_1 = C_{11}\left(\varepsilon_1 - \alpha_1\frac{\theta^+ + \theta^-}{2}\right) + C_{12}\left(\varepsilon_2 - \alpha_2\frac{\theta^+ + \theta^-}{2}\right) +$$
$$+k_2\left[D_{11}\left(\chi_1 - \alpha_1\frac{\theta^+ - \theta^-}{h}\right) + D_{12}\left(\chi_2 - \alpha_2\frac{\theta^+ - \theta^-}{h}\right)\right],$$
$$S_1 = C_{66}\omega + k_2 D_{66}\tau,$$
$$N_1 = \frac{h}{12}\left[12\varphi_1 + h^2\left(\varphi_3 + k_2\varphi_2\right)\right]$$
$$M_1 = D_{11}\left(\chi_1 - \alpha_1\frac{\theta^+ - \theta^-}{h}\right) + D_{12}\left(\chi_2 - \alpha_2\frac{\theta^+ - \theta^-}{h}\right) + \tag{1.9}$$
$$+k_2\left[D_{11}\left(\varepsilon_1 - \alpha_1\frac{\theta^+ + \theta^-}{2}\right) + D_{12}\left(\varepsilon_2 - \alpha_2\frac{\theta^+ + \theta^-}{2}\right)\right].$$

Здесь, как обычно,

$$C_{ij} = B_{ij}h,\ D_{ij} = B_{ij}\frac{h^3}{12}. \tag{1.10}$$

Выражения $T_2, S_2, N_2$ и $M_2$ можно получить из (1.9) путем круговой перестановки букв. Поверхностные условия оболочки имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^\pm l^\pm + \tau_{\alpha\beta}^\pm m^\pm + \tau_{\alpha\gamma}^\pm n^\pm &= X^\pm, \\ \tau_{\alpha\beta}^\pm l^\pm + \sigma_\beta^\pm m^\pm + \tau_{\beta\gamma}^\pm n^\pm &= Y^\pm, \\ \tau_{\alpha\gamma}^\pm l^\pm + \tau_{\beta\gamma}^\pm m^\pm + \sigma_\gamma^\pm n^\pm &= Z^\pm. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь $l^\pm, m^\pm, n^\pm$ – направляющие косинусы внешних нормалей поверхностей оболочки $\gamma = \pm h/2$. Они определяются формулами [2]:

$$l^\pm = -\frac{1}{2C^\pm}\frac{1}{H^\pm}\frac{\partial h}{\partial\alpha},\ m^\pm = -\frac{1}{2C^\pm}\frac{1}{H_2^\pm}\frac{\partial h}{\partial\beta},$$
$$n^+ = \frac{1}{C^+},\ n^- = -\frac{1}{C^-},\ C^\pm = \sqrt{\left(\frac{1}{2H_1^\pm}\pm\frac{\partial h}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{2H_2^\pm}\frac{\partial h}{\partial\beta}\right)^2 + 1}. \tag{1.12}$$

Коэффициенты Ламе определяются формулами:

$$H_1^{\pm} = A\left(1 \pm \frac{h}{2}k_1\right), \quad H_2 = B\left(1 \pm \frac{h}{2}k_2\right). \tag{1.13}$$

Из шести поверхностных условий (1.11) последние два понадобятся для определения напряжения $\sigma_\gamma$. Из первых четырех условий функции $\varphi_2, \varphi_3$, $\psi_2, \psi_3$ можно выразить через $u, \mathrm{v}, w, \varphi_1, \psi_1$. Эти выражения имеют вид:

$$\varphi_2 = \frac{1}{h}\left(C^+X^+ + C^-X^-\right) + \frac{1}{2Ah}\left\{\frac{1}{1+\frac{h}{2}k_1}\left[B_{11}\left(\varepsilon_1 + \frac{h}{2}\chi_2 - \alpha_1\theta^+\right) + \right.\right.$$

$$\left. + B_{12}\left(\varepsilon_2 + \frac{h}{2}\chi_2 - \alpha_2\theta^+\right)\right] +$$

$$\left. + \frac{1}{1-\frac{h}{2}k_1}\left[B_{11}\left(\varepsilon_1 - \frac{h}{2}\chi_1 - \alpha_1\theta^-\right) + B_{12}\left(\varepsilon_2 - \frac{h}{2}\chi_2 - \alpha_2\theta^-\right)\right]\right\}\frac{\partial h}{\partial \alpha} +$$

$$+ \frac{B_{66}}{2Bh}\left[\frac{1}{1+\frac{h}{2}k_2}\left(\omega + \frac{h}{2}\tau\right) + \frac{1}{1-\frac{h}{2}k_2}\left(\omega - \frac{h}{2}\tau\right)\right]\frac{\partial h}{\partial \beta}, \tag{1.14}$$

$$\varphi_3 = \frac{2}{h^2}\left(C^+X^+ - C^-X^-\right) - \frac{4\varphi_1}{h^2} + \frac{1}{Ah^2}\left\{\frac{1}{1+\frac{h}{2}k_1}\left[B_{11}\left(\varepsilon_1 + \frac{h}{2}\chi_1 - \alpha_1\theta^+\right) + \right.\right.$$

$$\left. + B_{12}\left(\varepsilon_2 + \frac{h}{2}\chi_2 - \alpha_2\theta^+\right)\right] - \frac{1}{1-\frac{h}{2}k_1}\left[B_{11}\left(\varepsilon_1 - \frac{h}{2}\chi_1 - \alpha_1\theta^-\right) + \right.$$

$$\left.\left. + B_{12}\left(\varepsilon_2 - \frac{h}{2}\chi_2 - \alpha_2\theta^-\right)\right]\right\}\frac{\partial h}{\partial \alpha} + \frac{B_{66}}{Bh^2}\left(\frac{\omega + \frac{h}{2}\tau}{1+\frac{h}{2}k_2} - \frac{\omega - \frac{h}{2}\tau}{1-\frac{h}{2}k_2}\right)\frac{\partial h}{\partial \beta}.$$

Выражения $\psi_2$ и $\psi_3$ можно получить из (1.14) путем круговой перестановки букв.

Уравнения равновесия дифференциального элемента срединной поверхности оболочки имеют известный вид [2]:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BT_1\right)-\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(AS_2\right)+S_1\frac{\partial A}{\partial\beta}+ABk_1N_1=-ABX,$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(AT_2\right)-\frac{\partial A}{\partial\beta}T_1+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BS_1\right)+S_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}+ABk_2N_2=-ABY,$$

$$-\left(k_1T_1+k_2T_2\right)+\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BN_1\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(AN_2\right)\right]=-Z, \qquad (1.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BM_1\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(AH_2\right)+\frac{\partial A}{\partial\beta}H_1-M_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}=ABN_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(AM_2\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BH_1\right)+\frac{\partial B}{\partial\alpha}H_2-M_1\frac{\partial A}{\partial\beta}=ABN_2.$$

Для грузовых членов имеем [2]:

$$X=\left(1+\frac{h}{2}k_1\right)\left(1+\frac{h}{2}k_2\right)X^{+}+\left(1-\frac{h}{2}k_1\right)\left(1-\frac{h}{2}k_2\right)X^{-}+\frac{1}{AB}\int_{-h/2}^{h/2}H_1H_2P_\alpha d\gamma,$$

$$Y=\left(1+\frac{h}{2}k_1\right)\left(1+\frac{h}{2}k_2\right)Y^{+}+\left(1-\frac{h}{2}k_1\right)\left(1-\frac{h}{2}k_2\right)Y^{-}+\frac{1}{AB}\int_{-h/2}^{h/2}H_1H_2P_\beta d\gamma,$$

$$Z=\left(1+\frac{h}{2}k_1\right)\left(1+\frac{h}{2}k_2\right)Z^{+}+\left(1-\frac{h}{2}k_1\right)\left(1-\frac{h}{2}k_2\right)Z^{-}+\frac{1}{AB}\int_{-h/2}^{h/2}H_1H_2P_\gamma d\gamma. \quad (1.16)$$

В силу выражений (1.14) определение напряженно-деформированного состояния ортотропных оболочек переменной толщины при учете влияния деформаций поперечных сдвигов и температуры сводится к решению пяти дифференциальных уравнений (1.15) относительно пяти функций $u, \mathrm{v}, w, \varphi_1, \psi$ .

2. К разрешающей системе (1.15) следует присоединить краевые условия оболочки. Так как эта система имеет десятый порядок, то на каждом краю оболочки надо ставить по пять условий. Приведем наиболее часто встречающиеся условия для края $\alpha=\mathrm{const}$.

а) свободный край:

$$T_1=0,\ N_1=0,\ S_1=0,\ M_1=0,\ H_1=0; \qquad (2.1)$$

б) шарнирно опертый край:

$$T_1=0,\ S_1=0,\ M_1=0,\ H_1=0,\ w=0; \qquad (2.2)$$

в) защемленный край:

$$u=0,\ \mathrm{v}=0,\ w=0,$$
$$\frac{\partial w}{\partial\alpha}-Aa_{55}\varphi_1=0,\ \frac{\partial w}{\partial\beta}-Ba_{55}\psi_1=0. \qquad (2.3)$$

Заметим, что условия защемления можно удовлетворить на всех точках сечения.

Аналогичным образом можно написать условия и для края $\beta=\mathrm{const}$.

3. В случаях достаточно пологих, а также замкнутых, но достаточно коротких оболочек можно значительно упростить теорию, т.е. перейти к

так называемой технической теории. Эти упрощения заключаются в следующем:

а) в геометрических соотношениях для $\chi_1, \chi_1$ и $\tau$ (1.8) сохраняются лишь члены, содержащие прогиб оболочки;

б) вместо выражений $T_1, T_2, M_1$ и $M_2$ (1.9) берутся более простые выражения, где опускаются члены, содержащие кривизны $k_1, k_2$;

в) в выражениях $\varphi_i, \psi_1$ (1.14) не принимаются во внимание $\pm hk_1/2$, в силу чего

$$C^{\pm} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \beta}\right)^2}$$

г) упрощаются и выражения грузовых членов (1.16)

$$X = X^{+} + X^{-} + \int_{-h/2}^{h/2} P_{\alpha} d\gamma, \quad Y = Y^{+} + Y^{-} + \int_{-h/2}^{h/2} P_{\beta} d\gamma, \quad Z = Z^{+} + Z^{-} + \int_{-h/2}^{h/2} P_{\gamma} d\gamma; \quad (2.4)$$

д) в уравнениях равновесия (1.15) опускаются члены $ABk_1N_1$ и $ABk_2N_2$.

Краевые условия записываются, как и прежде, но фигурирующие в них усилия и моменты имеют сравнительно упрощенные выражения.

Институт механики НАН РА

**Р. М. Киракосян**

## К уточненной теории термоупругости ортотропных оболочек переменной толщины

Методом представления решений степенными многочленами строится уточненная теория термоупругости ортотропных оболочек переменной толщины, учитывающая влияния деформаций поперечных сдвигов и температуры. Для пологих оболочек и оболочек достаточно малой длины рассматривается упрощенный (технический) вариант этой теории.

**Ռ. Մ. Կիրակոսյան**

## Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ թաղանթների ջերմաառաձգականության ճշգրտված տեսության մասին

Լուծումների աստիճանային բազմանդամներով ներկայացման մեթոդով կառուցվում է փոփոխական հաստության օրթոտրոպ թաղանթների ջերմաառաձգականության ճշգրտված տեսություն, որը հաշվի է առնում ընդլայնական սահքի դեֆորմացիաների և ջերմաստիճանի ազդեցությունները: Փոքր կորության և բավական կարճ թաղանթների համար դիտարկվում է այդ տեսության պարզեցված (տեխնիկական) տարբերակը:

**R. M. Kirakosyan**

## On the Refined Theory of Thermo-Elasticity of Orthotrope Shells of Variable Thickness

A refined thermo-elasticity theory of orthotrope shells of variable thickness by means of presenting solutions in the form of power polinomal contract, when the influence of transversal shear deformations and temperature are taking into account. For slope shells and shells of sufficiently small length the simplifed (technical) variant of this theory is considered.

### Литература

1. *Агаловян Л.А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 415 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М. Наука. 1974. 448 с.
3. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
4. *Васильев В. В.* - Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. №3. С.46-58.
5. *Гольденвейзер А.А.* Теория упругих тонких оболочек. М. Наука. 1976. 510 с.
6. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Теория оболочек переменной жесткости. Киев. Наукова думка. 1981. 544 с.
7. *Дургарьян С. М.* - Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. №6. С.154-160.
8. *Киракосян Р. М.* Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван. Изд. “Гитутюн” НАН РА. 2000. 122 с.
9. *Киракосян Р. М.* - ДНАН РА. 2011. Т.111. №2. С.148-155.
10. *Лурье А И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. М. Гостехиздат. 1947. 251 с.
11. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М. Физматгиз. 1963. 635 с.
12. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. М.-Л. Гостехиздат. 1947. 464 с.