ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 112 2012 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.98

Г. А. Саргсян

# О полиномиальных решениях задачи Дирихле для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами в круге

(Представлено академиком В. С. Захаряном 21/VI 2012)

**Ключевые слова:** *гиперболическое уравнение, полиномиальное решение, полнота, собственная функция, спектральный параметр*

Пусть $\Omega$ – единичный круг с центром в начале координат и $\partial\Omega$ – его граница. Рассмотрим следующую однородную краевую задачу:

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}=0,\left(a,b,c\in R,b^2-ac>0\right), \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega}=0, \tag{2}$$

где $a,b,c$ – вещественные постоянные коэффициенты.

Известно, что для гиперболических уравнений краевые условия задачи, заданные на всей границе ограниченной области, вообще говоря, являются некорректными. Краевые задачи для гиперболических уравнений второго порядка рассмотрены в многочисленных работах [1-5]. Ф. Джоном [2] исследовалась проблема нарушения единственности решения однородной задачи Дирихле для уравнения колебания струны в общей плоской ограниченной области, выпуклой относительно обоих семейств характеристик, в связи с некоторым отображением границы области в себя.

В. И. Арнольд указал на связь задачи Дирихле в эллипсе с проблемой малых знаменателей в контексте влияния на гладкость решения скорости приближения некоторого числа, связанного с задачей рациональными числами [3]. В этих статьях с различных точек зрения были найдены необходимые и достаточные условия корректности задачи (1), (2).

Для гиперболических уравнений известный критерий неединственности решения задачи (1), (2), который заключается в наличии периодических точек автоморфизма, так называемого характеристического бильярда, легко записать как $\pi$-рациональность угла между семействами характеристик. Как показано в [4], причиной нарушения единственности решения задачи (1), (2) является вещественность и $\pi$-рациональность угла $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{b^2-ac}}{a+c}$ между семействами комплексных характеристик.

В [5] рассматривается проблема единственности задачи Дирихле для уравнения колебания струны. Показано, что эта проблема эквивалентна классической проблеме Понселе из проективной геометрии для двух подходящих эллипсов, а также проблеме разрешимости алгебраического уравнения Пелля – Абеля, с которыми связаны некоторые другие задачи. Поскольку уравнения гиперболические, а краевые условия заданы вдоль всей границы, то такие задачи не относятся к числу классических и поэтому их изучение потребовало новых методов.

В настояшей работе предлагается новый и относительно простой метод построения системы полиномиальных решений задачи Дирихле для гиперболических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в круге, а также предлагается построение полной совокупности собственных функций задачи Дирихле для уравнения колебания струны.

Перейдем к построению в явном виде совокупности нетривиальных полиномиальных решений задачи (1), (2).

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x,y)=\varphi\left(\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)x-ay\right)+\psi\left(\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)x-ay\right) \tag{3}$$

или в комплексных переменных $z=x+iy,\ \overline{z}=x-iy$

$$u(x,y)=F\left(z+\mu_1\overline{z}\right)+G\left(z+\mu_2\overline{z}\right)\ , \tag{4}$$

где

$$\mu_1=\frac{b+\sqrt{b^2-ac}-ai}{b+\sqrt{b^2-ac}+ai}\ ,\mu_2=\frac{b-\sqrt{b^2-ac}-ai}{b-\sqrt{b^2-ac}+ai}\ .$$

Разность $\varphi_0=\varphi_1-\varphi_2$ назовем углом между характеристиками. Легко видеть, что $\operatorname{tg}^2\varphi_0=\dfrac{4\left(b^2-ac\right)}{\left(a+c\right)^2}$. Для построения совокупности полиномиальных решений задачи (1), (2) сформулируем вспомогательные леммы, которые используются в дальнейшем.

**Лемма 1**. *Для того чтобы* $\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{b^2-ac}}{a+c}$ *было рациональным числом, необходимо и достаточно, чтобы при некотором натуральном* $n$ *выполнялось соотношение*

$$\mu_2^n=\mu_2^n. \tag{5}$$

**Доказательство.** Пусть данное в лемме выражение – рациональное число, т.е. при некоторых целых значениях $n=2,3,\ldots$ и $k=1,2,3,\ldots(n-1)$ имеет место равенство

$$tg\frac{\pi k}{n}=\frac{2\sqrt{b^2-ac}}{a+c}, \tag{6}$$

которое можно переписать в виде

$$\left[i\left(a+c\right)+2\sqrt{b^2-ac}\right]=\left[i\left(a+c\right)-2\sqrt{b^2-ac}\right]e^{-\frac{2\pi ki}{n}}.$$

Легко видеть, что

$$i\left(a+c\right)+2\sqrt{b^2-ac}=\frac{i\left(b+\sqrt{b^2-ac}+ai\right)\left(b-\sqrt{b^2-ac}-ai\right)}{a},$$

$$i\left(a+c\right)-2\sqrt{b^2-ac}=\frac{i\left(b+\sqrt{b^2-ac}-ai\right)\left(b-\sqrt{b^2-ac}+ai\right)}{a}.$$

Отсюда имеем

$$\left(b+\sqrt{b^2-ac}-ai\right)\left(b-\sqrt{b^2-ac}+ai\right)=$$

$$=\left(b+\sqrt{b^2-ac}+ai\right)\left(b-\sqrt{b^2-ac}-ai\right)e^{-\frac{2\pi ki}{n}},$$

следовательно,

$$\frac{\left(b+\sqrt{b^2-ac}-ai\right)}{b+\sqrt{b^2-ac}+ai}=\frac{\left(b-\sqrt{b^2-ac}-ai\right)}{b-\sqrt{b^2-ac}+ai}e^{\frac{2\pi ki}{n}}$$

или $\mu_1=\mu_2 e^{\frac{2\pi ki}{n}}$. Отсюда получаем, что $\mu_1^n=\mu_2^n$. Необходимость доказана.

Проводя рассуждения в обратном порядке, легко установить и достаточность утверждения леммы.

В дальнейшем для построения полиномиальных решений существенную роль будут играть следующие полиномы:

$$K_n\left(z,\bar{z},\mu\right)=\sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left(-1\right)^{m+1}n\,C_{n-m-1}^{m-1}\,\mu^m\left(z+\mu\,\bar{z}\right)^{n-2m}\left(z\bar{z}\right)^m}{m},$$

$$P_n\left(z,\bar{z},\mu\right)=\sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left(-1\right)^{m+1}n\,C_{n-m-1}^{m-1}\,\mu^m\left(z+\mu\,\bar{z}\right)^{n-2m}}{m}, \tag{7}$$

соответственно порядка $n$ и $n-2$, причем

$$K_1\left(z,\bar{z},\mu\right)=0,\ P_1\left(z,\bar{z},\mu\right)=0,\ P_2\left(z,\bar{z},\mu\right)=2\mu.$$

Следующее утверждение сформулируем без доказательства, так как оно доказывается с помощью принципа математической индукции. Эта лемма используется при построении полиномиальных решений задачи (1), (2).

**Лемма 2**. *Для любого натурального* $n\geq 2$ *имеет место тождество*

$$z^n+\mu^n\bar{z}^n=\left(z+\mu\bar{z}\right)^n-K_n\left(z,\bar{z},\mu\right). \tag{8}$$

На основании леммы 2 легко доказать следующую лемму.

**Лемма 3.** *Если* $z\bar{z}=1,$ *то для любого натурального* $n\geq 2$ *имеет место тождество*

$$z^n+\mu^n\,\bar{z}^n=\left(z+\mu\,\bar{z}\right)^n-P_n\left(z,\bar{z},\mu\right)$$

*или*

$$\left.\left[\left(z+\mu\,\bar{z}\right)^n-P_n\left(z,\bar{z},\mu\right)\right]\right|_{\partial\Omega}=\left.\left(z^n+\mu^n\,\bar{z}^n\right)\right|_{\partial\Omega}. \tag{9}$$

На основании леммы (3) имеем

$$\left.\left[\left(z+\mu\,\bar{z}\right)^{n+1}-z^{n+1}-\mu^{n+1}\bar{z}^n\right]\right|_{z\bar{z}=1}=$$

$$=\left\{\left(z+\mu\bar{z}\right)\left[\left(z+\mu\bar{z}\right)^n-z^n-\mu^n\bar{z}^n\right]+\mu\left(z^{n-1}+\mu^{n-1}\bar{z}^{n-1}\right)\right\}_{z\bar{z}=1}=$$

$$=\left\{\left(z+\mu\bar{z}\right)P_n+\mu\left(z+\mu\bar{z}\right)^{n-1}-\mu P_{n-1}\right\}_{z\bar{z}=1}.$$

Полагая

$$P_{n+1}=\left(z+\mu\bar{z}\right)P_n+\mu\left(z+\mu\bar{z}\right)^{n-1}-\mu P_{n-1}, \tag{10}$$

получаем рекуррентные формулы для $P_n$.

Рассмотрим последовательность функции вида

$$u_n\left(x,y\right)=\left[\left(z+\mu_1\,\bar{z}\right)^n-P_n\left(z,\bar{z},\mu_1\right)\right]-\left[\left(z+\mu_2\,\bar{z}\right)^n-P_n\left(z,\bar{z},\mu_2\right)\right]. \tag{11}$$

**Теорема 1**. *Если числа* $a\neq 0,\ \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{b^2-ac}}{a+c}$ *рациональны, то функции (11) являются нетривиальными полиномиальными решениями задачи (1), (2).*

**Доказательство.** Функции $u\left(x,y\right)$ в представлении (11) являются полиномами от переменных $\left(z+\mu_1\bar{z}\right)$ и $\left(z+\mu_2\bar{z}\right)$, следовательно, решениями рассматриваемого уравнения (1). Покажем, что они удовлетворяют и граничному условию (2).

В самом деле, на основании леммы 3 имеем

$$\left.u\left(x,y\right)\right|_{\partial\Omega}=\left.\left[\left(z+\mu_1\,\bar{z}\right)^n-P_n\left(z,\bar{z},\mu_1\right)\right]\right|_{\partial\Omega}-\left.\left[\left(z+\mu_2\,\bar{z}\right)^n-P_n\left(z,\bar{z},\mu_2\right)\right]\right|_{\partial\Omega}=$$

$$=\left.\left(z^n+\mu_1^n\,\bar{z}^n\right)\right|_{\partial\Omega}-\left.\left(z^n+\mu_2^n\,\bar{z}^n\right)\right|_{\partial\Omega}=0.$$

Теорема доказана.

Следующая теорема указывает на еще одно представление системы нетривиальных полиномиальных решений (11) краевой задачи (1), (2).

**Теорема 2**. *Систему функций нетривиальных полиномиальных решений (11) краевой задачи (1), (2) можно представить в следующем специальном виде:*

$$u(x, y) = (1 - z\bar{z})\, Q(z, \bar{z}),$$

*где*

$$Q(z, \bar{z}) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{v=1}^{m} \sum_{\omega=0}^{n-2m} \sum_{s=0}^{m+\omega-1} \frac{(-1)^m (n-m-1)!\, \mu_1^{m+\omega-1-s} \mu_2^{s} z^{n-m-\omega-v} \bar{z}^{n+\omega-v}}{m!\,\omega!\,(n-2m-\omega)!}.$$

**Доказательство.** С учетом условия $\mu_1^n = \mu_2^n$ и однородности уравнений (1) на основани леммы 2 имеем

$$u(x, y) = \frac{1}{n(\mu_2 - \mu_1)} \left[ (z + \mu_1 \bar{z})^n - P_n(z, \bar{z}, \mu_1) \right] -$$

$$- \frac{1}{n(\mu_2 - \mu_1)} \left[ (z + \mu_2 \bar{z})^n - P_n(z, \bar{z}, \mu_2) \right] =$$

$$= \frac{1}{n(\mu_2 - \mu_1)} \left[ (z + \mu_1 \bar{z})^n - z^n - \mu_1^n \bar{z}^n - P_n(z, \bar{z}, \mu_1) \right] -$$

$$- \frac{1}{n(\mu_2 - \mu_1)} \left[ (z + \mu_2 \bar{z})^n - z^n - \mu_2^n \bar{z}^n - P_n(z, \bar{z}, \mu_2) \right] =$$

$$= \frac{1}{n(\mu_2 - \mu_1)} \left[ K_n(z, \bar{z}, \mu_1) - P_n(z, \bar{z}, \mu_1) \right] - \frac{1}{n(\mu_2 - \mu_1)} \left[ K_n(z, \bar{z}, \mu_2) - P_n(z, \bar{z}, \mu_2) \right] =$$

$$= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{m+1} C_{n-m-1}^{m-1}}{m} \left[ 1 - (z\bar{z})^m \right] \cdot \left[ \mu_1^m (z + \mu_1 \bar{z})^{n-2m} - \mu_2^m (z + \mu_2 \bar{z})^{n-2m} \right] =$$

$$= \frac{1 - z\bar{z}}{\mu_1 - \mu_2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{v=1}^{m} \frac{(-1)^{m+1} C_{n-m-1}^{m-1} (z\bar{z})^{m-v}}{m} \cdot \sum_{\omega=0}^{n-2m} \left( \mu_1^{m+\omega} - \mu_2^{m+\omega} \right) C_{n-2m}^{\omega} z^{n-2m+\omega} \bar{z}^{\omega} =$$

$$= (1 - z\bar{z}) \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{v=1}^{m} \sum_{\omega=0}^{n-2m} \sum_{s=0}^{m+1+\omega} \frac{(-1)^{m+1} (n-m-1)!\, \mu_1^{m+\omega-1-s} \mu_2^{s} z^{n-m-\omega-v} \bar{z}^{n+\omega-v}}{m!\,\omega!\,(n-2m-\omega)!} =$$

$$= (1 - z\bar{z})\, Q(z, \bar{z}).$$

Теорема доказана.

Проиллюстрируем полученный результат на известных спектральных задачах. В работе Р. А. Александряна [1] в связи с изучением качественного поведения решений системы типа С. Л. Соболева, описывающей малые колебания вращающейся идеальной жидкости, впервые был поставлен вопрос об исследовании общей спектральной задачи Дирихле:

$$\mathrm{Mu} + \lambda\, \mathrm{Lu} = 0, \tag{12}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{13}$$

где $M$ и $L$ – линейные дифференциальные операторы второго порядка, $\lambda$ – спектральный параметр. Краевая задача (12), (13) в случае $Mu = u_{xx} - u_{yy}, Lu = u_{xx} + u_{yy}$ путем введения специальных топологических отображений границы в себя подробно изучена Р.А.Александряном [1]. В частности, в случае, когда $\Omega$ – единичный круг с центром в начале координат, в явном виде построена полная система собственных функций задачи (12), (13) через известные полиномы Чебышева первого рода.

При

$$Mu = u_{xx} - u_{yy}, Lu = u_{xx} + u_{yy},$$

задача (12), (13) принимает вид

$$(1+\lambda)u_{xx} - (1-\lambda)u_{yy} = 0, \tag{14}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{15}$$

и при $|\lambda| < 1$ представляет собой гиперболическое уравнение, содержащее спектральный параметр. Задача состоит в том, чтобы найти такие значения параметра $\lambda$, называемые собственными, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (14), удовлетворяющие граничному условию (15), а затем исследовать вопрос полноты системы таких решений в том или ином классе функций.

На основании теоремы 1 и равенства (4), (6) построим следующие функции:

$$\begin{gathered} u_{n,k}(x,y) = \left[\left(z + e^{-\pi ki/n}\,\overline{z}\right)^n - P_n\left(z + \overline{z}\,e^{-\pi ki/n}\right)\right] - \\ -\left[\left(z + e^{-\pi ki/n}\,\overline{z}\right)^n - P_n\left(z + \overline{z}\,e^{-\pi ki/n}\right)\right], \quad n = 2, 3, \cdots, k = 1, 2, \cdots (n-1). \end{gathered} \tag{16}$$

**Теорема 3**. *Система функций (16) является системой собственных функций для однородной краевой задачи (14), (15), соответствующей собственным значениям*

$$\lambda_{n,k} = \cos\frac{\pi k}{n}, n = 2, 3, \ldots, k = 1, 2 \ldots (n-1).$$

Собственные значения $\lambda_{n,k}$ являются бесконечнократными, поскольку $\lambda_{n,k} = \lambda_{np,kp}$, а собственные функции $u_{n,k}(z, \overline{z})$, соответствующие собственному значению $\lambda_{n,k}$ как полиномы различных степеней, линейно независимы. Подставляя $z = \rho e^{i\varphi}$ в формулу (16) и используя известную формулу

$$\cos n\varphi = 2^{n-1}\cos^n\varphi - \frac{n}{2}\sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{m+1} C_{n-m-1}^{m-1} 2^{n-2m} \cos^{n-2m}\varphi}{m},$$

после некоторых простых преобразований собственных функций (16) можно сформулировать следующее представление собственных функций задачи (14), (15).

**Теорема 4**. *Если* $\Omega$ *есть круг, то функции*

$$u_{n,k}\left(x,y\right)=T_n\left(\rho\cos\left(\varphi-\frac{\pi k}{2n}\right)\right)+\left(-1\right)^{k+1}T_n\left(\rho\cos\left(\varphi+\frac{\pi k}{2n}\right)\right) \tag{17}$$

*являются собственными функциями задачи (14), (15), соответствующими собственным значениям* $\lambda_k^n=\cos\frac{\pi k}{n}$, *каждое из которых имеет бесконечную кратность; здесь*

$$\mathrm{x}=\rho\cos\varphi,\ \mathrm{y}=\rho\sin\varphi,\ n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \left(n-1\right),$$

*а* $T_n(t)=\cos(n\arccos t)$ *– полиномы Чебышева первого рода*.

**Замечание 1**. Построенные нами собственные функции (17) совпадают с собственными функциями задачи (14), (15), построенными ранее в работе Р.А.Александаряна [1].

Известно [1], что собственные функции (17), соответствующие собственному значению $\lambda_{n,k}=\cos\frac{\pi k}{n}, n=2,3,\ldots,k=1,2\ldots\left(n-1\right)$, образуют полную систему в $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1\left(\Omega\right)$, следовательно, построенные нами собственные функции (16) также образуют полную систему в $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1\left(\Omega\right)$.

Рассмотрим следующую однородную краевую задачу:

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}=-\lambda\Delta u, \tag{18}$$

$$u\big|_{\partial\Omega}=0, \tag{19}$$

где $\Delta$ – оператор Лапласа.

**Теорема 5**. *Если* $\Omega$ *есть круг* $x^2+y^2<1$, *то функции*

$$u_{n'k}\left(x,y\right)=\cos\left[n\arccos\left(x\sin\left(\frac{\pi k}{2n}-\alpha\right)+y\cos\left(\frac{\pi k}{2n}-\alpha\right)\right)\right]+$$

$$+\left(-1\right)^{k+1}\cos\left[n\arccos\left(y\cos\left(\frac{\pi k}{2n}+\alpha\right)-x\sin\left(\frac{\pi k}{2n}+\alpha\right)\right)\right]$$

*являются собственными функциями краевой задачи (18),(19), соответствующими собственному значению*

$$\lambda=\lambda_{n,k}=-\frac{a+c}{2}+\frac{\sqrt{\left(a-c\right)^2+b^2}}{2}\cos\frac{\pi k}{2n},\left(n=2,\ 3,\ \ldots\quad k=1,\ 2,\ \ldots\ \left(n-1\right)\right),$$

*где* $\alpha=\frac{1}{2}\arccos\frac{a-c}{\sqrt{\left(a-c\right)^2+b^2}}$, *которые образуют полную систему в* $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2\left(\Omega\right)$.

Аналогично, легко получить собственные функции уравнения

$$\lambda^2Lu+\lambda Nu+Mu=0,$$

если $L$, $N$, $M$ – линейные дифференциальные операторы второго порядка с постоянными коэффициентами, содержащие лишь вторые производные по $x$ и $y$, а $\Omega$ – эллипс, причем тип уравнения не играет роли.

**Замечание 2**. При различных $n$ $u_{n,k}(x, y)$ могут соответствовать одинаковым значениям, однако они оказываются линейно независимыми как полиномы различных степеней. Нужно также отметить, что собственные функции $u_{n,k}(x, y)$ образуют полную систему в круге в смысле метрики всякого такого пространства, где линейное многообразие полиномов, исчезающих на границе, всюду плотно.

**Замечание 3**. Легко видеть, что если существует решение (1), обращающееся в нуль на $\partial\Omega$, то оно имеет вид (4), и для любой функции $\psi$

$$u(z, \bar{z}, \mu_1, \mu_2) = \psi\left(f\left(\mathrm{z} + \mu_1 \bar{\mathrm{z}}\right)\right) - \psi\left(g\left(\mathrm{z} + \mu_2 \bar{\mathrm{z}}\right)\right) \qquad (*)$$

удовлетворяет тому же уравнению и нулевым граничным условиям. Очевидно, что линейно незвисимых функций вида (*) бесконечно много. Таким образом, либо решение Дирихле для уравнения (1) единственно, либо существует бесконечно много линейно независимых решений.

Государственный инженерный университет Армении

**Г. А. Саргсян**

## О полиномиальных решениях задачи Дирихле для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами в круге

Предлагается новый метод построения системы полиномиальных решений задачи Дирихле для гиперболических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в круге. Предлагается также построение полной совокупности собственных функций задачи Дирихле для уравнения колебания струны.

Գ. Ա. Սարգսյան

## Հաստատուն գործակիցներով հիպերբոլական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի բազմանդամային լուծումների մասին շրջանում

Առաջարկվում է նոր մեթոդ՝ կառուցելու հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի բազմանդամային լուծումները շրջանում: Աշխատանքում առաջարկվում է նաև կառուցել լարի տատանման հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի սեփական ֆունկցիաների լրիվ համախումբը:

**G. A. Sargsyan**

## On Polynomial Solutions in the Disc for Dirichlet Problem of Hyperbolic Equations with Constant Coefficients

A new method for construction of the complete set of polynomial solutions in the disc for the Dirichlet problem of hyperbolic equations with constant coefficients is suggested. Construction of the complete set of the eigenfunctions of Dirichlet problem for the equation of span oscillation is also suggested.

### Литература

1. *Александрян Р. А.*– Тр. Моск. мат. о-ва. 1960. Вып. 9. С. 455-505.
2. *John F.* – Am. J. Math. 1941. V. 63. P. 141-154.
3. *Арнольд В.И.* – Изв. АН СССР. Серия матем. 1961. Т. 25. N 1. С. 21-86.
4. *Бурский В.П.* – Мат. заметки. 1990. Т. 48. N3.
5. *Бурский В.П., Жеданов* – Укр. мат. журн. 2006. Т. 2.
6. *Бицадзе А. В.* – Некоторые классы уравнений в частных производных. М. Наука. 1981.