ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 112 2012 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Р. В. Даллакян

О представлении одного класса аналитических в единичном круге функций

(Представлено академиком В. С. Захаряном 11/VI 2012)

Ключевые слова: *классы функций* H^p, A_α^p, *дробный интеграл порядка* β *функции* f

Пусть $\mathbb{D}=\{z;|z|<1\}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Множество аналитических в круге $\mathbb{D}$ функций обозначим через $Hol(\mathbb{D})$. Далее пусть $0\le r<1$, $0<p<\infty$, $f\in Hol(\mathbb{D})$ и пусть

$$M_p(r,f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},\ M_\infty(r,f)=\sup_{0\le\theta\le 2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|.$$

Скажем, что $f, f\in Hol(\mathbb{D})$, принадлежит классу Харди H^p, $0<p\le\infty$, если

$$\|f\|_{H^p}\stackrel{def}{\equiv}\sup_{0<r<1}M_p(r,f)<+\infty.$$

Свойства функций классов Харди описаны в [1,2]. Обозначим через A_α^p, $0<p<+\infty$, $-1<\alpha<+\infty$, множество тех функций $f, f\in Hol(\mathbb{D})$, для которых

$$\|f\|_{A_\alpha^p}\equiv\left(\int_{\mathbb{D}}(1-|z|)^\alpha|f(z)|^p\,dA(z)\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty,$$

где $dA(z)=\frac{1}{\pi}dxdy=\frac{1}{\pi}rdrd\theta$ – мера Лебега. Определим $A^p\equiv A_0^p$. Классы A_α^p некоторыми авторами называются классами Бергмана (см. например [3]). Функции этих классов были исследованы и М. М. Джрбашяном [4], который эти классы обозначил через $Hp(\alpha)$. Свойства этих классов описаны в [5].

В вышеуказанных работах [3 – 5] доказывается, что если $f \in A_\alpha^p$,

$$\left|f(z)\right| \le \frac{C\|f\|_{A_\alpha^p}}{\left(1-|z|\right)^{(2+\alpha)/p}}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{1}$$

Пусть $\beta > 0$ и $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in Hol(\mathbb{D})$. Дробным интегралом порядка β функции f называется следующая функция:

$$f_{[\beta]}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+1+\beta)} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

В [6] доказано, что $f_{[\beta]}(z) \in Hol(\mathbb{D})$. Взяв $\beta = \frac{\alpha+1}{p}$ из теоремы F работы [7], получаем, что если $f(z) = \sum a_n z^n \in A_\alpha^p$, то $f_{\left[\frac{\alpha+1}{p}\right]}(z) \in A^{2p}$. Известно, что (см. [6]) $H^p \subset A^{p(\alpha+2)}$. Возникает следующий вопрос: принадлежат ли $f_{\left[\frac{\alpha+1}{p}\right]}(z)$ классу H^p. На этот вопрос, в случае когда $0 < p \le 2$, положительный ответ дает следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $f(z) = \sum a_n z^n \in A_\alpha^p$, $0 < p \le 2$, $\alpha > -1$, *то функция*

$$h(z) = \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1+n\right)} a_n z^n, \quad |z| < 1$$

принадлежит классу H^p.

В случае $2 \le p < +\infty$, взяв $\beta = \frac{p+\alpha-1}{p}$, также доказывается, что фракциональный интеграл порядка β функции f, $f \in A_\alpha^p$, принадлежит классу H^p, т.е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A_\alpha^p$, $2 \le p < +\infty$, $\alpha > -1$, *то*

$$h(z) = \frac{p+\alpha-1}{p} \int_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{p}} f(\rho z)\, d\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}\right) n!}{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p}+1+n\right)} a_n z^n \tag{2}$$

принадлежит классу H^p.

В [3 – 5] доказано, что если $f \in A_\alpha^p$, $1 \le p < +\infty$, $\alpha > -1$, то f имеет следующий вид:

$$f(z) = \frac{1+\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r)^\alpha \frac{f\left(\rho e^{i\varphi}\right)}{\left(1 - z\rho e^{-i\varphi}\right)^{2+\alpha}} \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

М. М. Джрбашяном в [4] (см. также [5]) дано еще одно представление функций класса A_α^2, $\alpha>-1$.

Теорема (М. М. Джрбашян). *Если* $f\in A_\alpha^2$, $\alpha>-1$, *то*

$$h(z)=\frac{1+\alpha}{2}\int_0^1(1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{2}}f(\rho z)\,d\rho,\ |z|<1$$

принадлежит классу H^2, *а* $f(z)$ *имеет следующее интегральное представление:*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h\left(e^{i\theta}\right)d\theta}{\left(1-ze^{-i\theta}\right)^{\frac{3+\alpha}{2}}}. \tag{3}$$

В частном случае $\alpha=0$ это утверждение доказано Келдышем [8]. Пользуясь результатами теоремы 1 и 2, далее удалось получить интегральные представления типа (3) для функций классов A_α^p, $0<p<+\infty$, $\alpha>-1$.

Теорема 3. *Пусть* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in A_\alpha^p$, $0<p\le 2$, $\alpha>-1$. *Тогда* $f(z)$ *допускает следующее интегральное представление:*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h\left(e^{i\theta}\right)d\theta}{\left(1-e^{-i\theta}z\right)^{\frac{\alpha+1}{p}-1}},$$

где

$$h(z)=\frac{1+\alpha}{p}\int_0^1(1-\rho)^{\frac{\alpha+1}{p}-1}f(\rho z)\,d\rho=\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1+n\right)}a_nz^n,$$

$$|z|<1. \tag{4}$$

Теорема 4. *Пусть* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in A_\alpha^p$, $2\le p<+\infty$, $\alpha>-1$. *Тогда* $f(z)$ *имеет следующее интегральное представление:*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h\left(e^{i\theta}\right)d\theta}{\left(1-e^{-i\theta}z\right)^{\frac{2p+\alpha-1}{p}}},$$

где

$$h(z)=\frac{p+\alpha-1}{p}\int_0^1(1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{p}-1}f(\rho z)\,d\rho=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p}+1\right)n!}{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p}+1+n\right)}a_nz^n.$$

Государственный инженерный университет Армении

Р. В. Даллакян

О представлении одного класса аналитических в единичном круге функций

Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Аналитическая в $\mathbb{D}$ функция f принадлежит классу A_α^p, если $\int_{\mathbb{D}} (1-|z|)^\alpha |f(z)|^p \, dxdy < +\infty$. Доказывается, что для функций классов A_α^p соответствующий дробный интеграл порядка β в частных случаях может принадлежать классам Харди H^p. Далее, пользуясь этими результатами, приводятся два представления (соответственно для случаев $0 < p \le 2$ и $2 \le p < +\infty$) функций классов A_α^p, которые в частном случае $p = 2$ совпадают с одним представлением функций класса A_α^2, полученным М. М. Джрбашяном.

Ռ. Վ. Դալլաքյան

Միավոր շրջանում մի դասի անալիտիկ ֆունկցիաների ներկայացման մասին

Թող $\mathbb{D}$ -ն միավոր շրջանն է $\mathbb{C}$ կոմպլեքս հարթության մեջ: $\mathbb{D}$ -ում անալիտիկ $f(z)$ ֆունկցիան պատկանում է A_α^p դասին, եթե $\int_{\mathbb{D}} (1-|z|)^\alpha |f(z)|^p \, dA(z) < +\infty$, որտեղ $dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{1}{\pi} rdrd\theta$: Ապացուցվում է, որ A_α^p դասերի ֆունկցիաների β կարգի ֆունկցիոնալ ինտեգրալները մասնավոր դեպքերում կարող են պատկանել H^p դասին: Այնուհետև, օգտվելով այդ արդյունքներից, տրվում են (համապատասխանաբար $0 < p \le 2$ և $2 \le p < +\infty$ դեպքերի համար) A_α^p դասերի ֆունկցիաների ներկայացումներ, որոնք $p = 2$ մասնավոր դեպքում համընկնում են A_α^2 դասերում Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից տրված ներկայացման հետ:

R. V. Dallakyan

On a Representation of One Class of Analytic Functions in the Unit Case

Let $\mathbb{D}$ be a unit disk of the complex plane $\mathbb{C}$. Analytic in $\mathbb{D}$ function $f(z)$ belongs to A_α^p class if $\int_{\mathbb{D}} (1-|z|)^\alpha |f(z)|^p \, dA(z) < +\infty$. It is proved that the fractional integral of order β of the function $f(z) \in A_\alpha^p$ in some cases belongs to the classes Hardy H^p.

Using this result we get two representations from the class A_{α}^{p}. In the case $p=2$ these representations concides with Djrbashyan's representation of the functions $f(z) \in A_{\alpha}^{p}$.

Литература

1. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М. Гос. изд техн.-теоретич. лит. М. 1950. 336 с.
2. *Duren P. L.* Theory of H^{p} spaces. Academic Press. 1970.
3. *Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K.*- Graduate Texts in Mathematics 2000. Springer. New-York, Berlin, etc. V. 199. P. 286.
4. *Джрбашян М. М.* - Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР. 1948. Вып. 2. С. 3-40.
5. *Djrbashian A. E., Shamoian F. A.*. - Teubner Texts in Mathematics. BSB B. G Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig. 1988. V. 105. P. 199.
6. *Duren P. L., Romberg B., Shields A. L.* - J. Reine Angew math. 1969. V. 238. P. 32-60.
7. *Maher Marzu M. H.* - Bull. Austral. Math. Soc.1990. V. 42. P. 417-425.
8. *Keldysch M. V.* - Coptes Rendus (Doklady) Academie des Sciences USSR (ns). 1941. V. 30. P. 778-780.
9. *Buckley S. M., Koskela P.*, *Vukotic D.* - Math. Proc. Comb. Soc. 1999. V. 126. P. 369-385.