ՀԱՅԱUՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 112 2012 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Построение уточненной классической теории упругих тонких оболочек по микрополярной теории

(Представлено 7/X 2011)

Ключевые слова: *микрополярная, классическая теории; упругий, тонкий, оболочка.*

Введение. В [1, 2] указан круг важных задач статического и динамического характера, изучение которых по классической теории упругости приводит к ее некорректности или несостоятельности при объяснении определенных явлений, наблюдаемых в опытах. Причину этого следует искать в том, что классическая теория упругости как приближенная модель механики твердого деформируемого тела не в состоянии отобразить упругие свойства реальных тел, определяемые их дискретной-внутренней (атомно-молекулярной) структурой. В [1, 2] обосновывается моментная (несимметричная, микрополярная) теория упругости как следующая, высшая, модель механики деформируемого твердого тела, в которой явно отражены свойства реальных тел, вытекающие из их дискретной структуры.

В работах [3-7] на основе метода гипотез, который по существу отражает асимптотические свойства решения трехмерной граничной задачи микрополярной теории упругости в тонких областях [8,9], построены общие прикладные модели статики и динамики микрополярных упругих тонких оболочек (пластин) и балок с независимыми полями перемещений и вращений.

В данной работе рассматривается построение классической модели упругих тонких оболочек (пластин и балок) исходя из соответствующей микрополярной модели. Так как в микрополярных моделях оболочек (пластин и балок) полностью учитываются влияния поперечных сдвиговых деформаций как важные факторы в микрополярной теории со свободным вращением [3-7], понятно, что полученные на их основе классические модели будут уточненными моделями указанных тонких тел. Отметим, что как микрополярные модели [3-7], так и полученные на их основе уточненные классические модели упругих тонких оболочек (пластин и балок) будут асимптотически точными моделями.

1. Общая модель микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины $2h$. Будем исходить из уравнений и граничных условий трехмерной микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [10], записанных в криволинейных ортогональных координатах $\alpha_k\left(\kappa=1,2,3\right)$, принятых в теории оболочек. На лицевых поверхностях оболочки будем считать заданными соответствующие компоненты силового и моментного тензоров напряжений, а на поверхности края оболочки – либо силовые и моментные напряжения, либо перемещения и повороты (например условия полной заделки), либо смешанные условия (например, трехмерные условия шарнирного опирания).

Предположим, что толщина оболочки очень мала по сравнению с характерными радиусами кривизны срединной поверхности.

С учетом качественных результатов асимптотического решения граничной или начально-граничной задачи трехмерной микрополярной теории упругости в области тонкой оболочки (пластинки или прямоугольника) [8, 9] в основу построения общей прикладной теории микрополярных оболочек со свободным вращением были поставлены следующие достаточно общие предположения [3-7]:

1) в процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной поверхности волокна свободно поворачиваются в пространстве как жесткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярными к деформированной срединной поверхности.

Принятую гипотезу математически можем записать так: тангенциальные перемещения и нормальный поворот распределены по толщине оболочки по линейному закону:

$$V_i = u_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\alpha_3\psi_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\quad i=1,2, \tag{1.1}$$

$$\omega_3=\Omega_3\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\alpha_3\iota\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \tag{1.2}$$

а нормальное перемещение и тангенциальные повороты не зависят от поперечной координаты α_3:

$$V_3=w\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \tag{1.3}$$

$$\omega_i=\Omega_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\quad i=1,2. \tag{1.4}$$

Отметим, что с точки зрения перемещений принятая гипотеза ((1.1), (1.3)) по сути дела совпадает с кинематической гипотезой Тимошенко в классической теории упругих оболочек [11-13]. Гипотезу (1.1)-(1.4) в целом, как в работах [3-7], назовем обобщенной кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории оболочек;

2) величинами α_3 / R_i по сравнению с единицей можно пренебрегать;

3) силовым напряжением σ_{33} в обобщенном законе Гука можно пре-

небрегать относительно силовых напряжений $\sigma_{ii}\left(i=1,2\right)$;

4) при определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} сначала примем

$$\sigma_{3i}=\overset{0}{\sigma}_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\quad \mu_{33}=\overset{0}{\mu}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\ \left(i=1,2\right). \tag{1.5}$$

После вычисления указанных величин значения σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим прибавлением к значениям (1.5) слагаемого, получаемого интегрированием соответствующих уравнений равновесия, для которых будем требовать, чтобы усредненные по толщине оболочки указанные величины были равны нулю.

Основная система уравнений общей прикладной модели микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вра будет иметь вид [5-7]:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(T_{ii}-T_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(S_{ji}+S_{ij}\right)+\frac{N_{i3}}{R_i}=-\left(q_i^++q_i^-\right),$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(M_{ii}-M_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial\alpha_j}+$$

$$\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(H_{ji}+H_{ij}\right)-N_{3i}=-h\left(q_i^+-q_i^-\right), \tag{1.6}$$

$$\frac{T_{11}}{R_2}+\frac{T_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]=q_3^++q_3^-,$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(L_{ii}-L_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(L_{ji}+L_{ij}\right)+\frac{L_{i3}}{R_i}+$$

$$+\left(-1\right)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)=-\left(m_i^++m_i^-\right),$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\left(S_{12}-S_{21}\right)=\left(m_3^++m_3^-\right), \tag{1.7}$$

$$L_{33}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2\Lambda_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1\Lambda_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\left(H_{12}-H_{21}\right)=h\left(m_3^+-m_3^-\right).$$

соотношения упругости

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right],\qquad S_{ij}=2h\left[\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{ji}\right],$$

$$M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii}+\nu K_{jj}\right],\qquad H_{ij}=\frac{2h^3}{3}\left[\left(\mu+\alpha\right)K_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)K_{ji}\right], \tag{1.8}$$

$$N_{i3}=2h\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{i3}+2h\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{3i},\quad N_{3i}=2h\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{3i}+2h\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{i3},$$

$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma\left(\beta+\gamma\right)}{\beta+2\gamma}\kappa_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\kappa_{jj}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},$$

$$L_{ij}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}\right],\quad L_{33}=2h\left[(\beta+2\gamma)\iota+\beta(\kappa_{11}+\kappa_{22})\right],\ (1.9)$$

$$L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+-m_i^-}{2}\right],\quad \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^++m_i^-}{2h}\right].$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},\qquad \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i-(-1)^j\Omega_3,$$

$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j,\qquad K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i-(-1)^j\iota,\ (1.10)$$

$$\Gamma_{i3}=-\vartheta_i+(-1)^j\Omega_j,\quad \Gamma_{3i}=\psi_i-(-1)^j\Omega_j,\ \vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},$$

$$\kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j+\frac{\Omega_3}{R_i},\qquad \kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,\quad (1.11)$$

$$\kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i},\qquad l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i}.$$

Здесь $i,j=1,2;\ i\neq j$.

граничные условия (при $\alpha_1=const$)

$$T_{11}=T_{11}^*\ \text{или}\ u_1=u_1^*,\ S_{12}=S_{12}^*\ \text{или}\ u_2=u_2^*,\ N_{13}=N_{13}^*\ \text{или}\ w=w^*,$$
$$M_{11}=M_{11}^*\ \text{или}\ K_{11}=K_{11}^*,\quad H_{12}=H_{12}^*\ \text{или}\ K_{12}=K_{12}^*,\qquad (1.12)$$

$$L_{11}=L_{11}^*\ \text{или}\ \kappa_{11}=\kappa_{11}^*,\ L_{12}=L_{12}^*\ \text{или}\ \kappa_{12}=\kappa_{12}^*,\ L_{13}=L_{13}^*\ \text{или}\ \kappa_{13}=\kappa_{13}^*,$$
$$\Lambda_{13}=\Lambda_{13}^*\ \text{или}\ l_{13}=l_{13}^*.\qquad (1.13)$$

Система уравнений (1.6)-(1.11) микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений представляет собой систему дифференциальных уравнений 18-го порядка с 9-ю граничными условиями (1.12), (1.13) на каждом из контуров срединной поверхности оболочки Γ. Это система из 52 уравнений относительно 52 неизвестных функций: ($u_i, w, \psi_i, \Omega_i, \Omega_3, \iota, \vartheta_i$, $T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}, M_{ii}$, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{33}, L_{i3}, Λ_{i3}, $\Gamma_{ii}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}, K_{ii}, K_{ij}, \kappa_{ii}$, $\kappa_{ij}, \kappa_{i3}, l_{i3}$).

В модели (1.6)-(1.13) микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Для составления динамической модели микрополярных упругих тонких оболочек следует в уравнения равновесия (1.7) ввести по принципу

Даламбера соответствующие силы и моменты инерции, а также задать начальные условия.

Отметим, что все основные зависимости для микрополярных пластин и балок можем получить как частные случаи модели микрополярных оболочек (1.6)-(1.13).

2. Общая (уточненная) модель упругих тонких оболочек на основе классической теории упругости. Как в трехмерном случае, так и в прикладной двумерной теории микрополярных оболочек с независимыми полями перемещений и вращений, для того чтобы перейти к соответствующей классической теории, необходимо вместо упругого постоянного α подставить ноль $(\alpha = 0)$. Тогда из трехмерной микрополярной теории будут отделяться основные уравнения классической теории упругости, а из прикладной двумерной теории микрополярных оболочек (1.6)-(1.13) будет отделяться классическая модель упругих тонких оболочек с учетом деформаций поперечных сдвигов.

Таким образом, основные уравнения и граничные условия классической уточненной теории упругих тонких оболочек, учитывающей деформации поперечных сдвигов, будут выражаться так:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(T_{ii} - T_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(S_{ji} + S_{ij}\right) + \frac{N_{i3}}{R_i} = -\left(q_i^+ + q_i^-\right),$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(M_{ii} - M_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} +$$

$$+ \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(H_{ji} + H_{ij}\right) - N_{3i} = -h\left(q_i^+ - q_i^-\right), \qquad (2.1)$$

$$\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2 N_{13}\right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1 N_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right] = q_3^+ + q_3^-,$$

соотношения упругости

$$T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}\right], \qquad M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii} + \nu K_{jj}\right],$$

$$S_{ij} = 2\mu h\tilde{\Gamma}_{ij}, \quad H_{ij} = \frac{2h^3}{3}\mu\tilde{K}_{ij}, \quad N_{i3} = N_{3i} = 2\mu h\cdot\tilde{\Gamma}_{i3} = 2\mu h\tilde{\Gamma}_{3i}. \quad (2.2)$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_j + \frac{w}{R_i}, \quad K_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\psi_j,$$

$$\tilde{\Gamma}_{12} = \tilde{\Gamma}_{21} = \Gamma_{12} + \Gamma_{21} = \left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_1\right) + \left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_2\right), \quad (2.3)$$

$$\tilde{K}_{12} = \tilde{K}_{21} = K_{12} + K_{21} = \left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\psi_1\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\psi_2\right),$$

$$\widetilde{\Gamma}_{i3}=\widetilde{\Gamma}_{3i}=\Gamma_{i3}+\Gamma_{3i}=-\vartheta_i+\psi_i\,.$$

Здесь $i, j = 1,2,\quad i \neq j$.

Граничные условия (при $\alpha_1 = const$)

$T_{11} = T_{11}^*$ или $u_1 = u_1^*$, $S_{12} = S_{12}^*$ или $u_2 = u_2^*$, $N_{13} = N_{13}^*$ или $w = w^*$,

$M_{11} = M_{11}^*$ или $K_{11} = K_{11}^*$, $H_{12} = H_{12}^*$ или $K_{12} = K_{12}^*$, (2.4)

На основе принципа Даламбера из модели классической уточненной теории статики тонких оболочек (2.1)-(2.4) можем перейти к соответствующей уточненной динамической модели.

Уточненные классические модели для упругих тонких пластин и балок с учетом поперечных сдвиговых деформаций можем получить как частные случаи теории оболочек (2.1)-(2.4).

Весьма важно отметить, что классическую теорию упругих оболочек с учетом поперечных сдвигов (2.1)-(2.4) можем построить также самостоятельно исходя непосредственно из трехмерных уравнений и граничных условий классической теории упругости на основе следующей системы гипотез: 1) кинематическая гипотеза для перемещений (1.1), (1.3) (кинематическая гипотеза Тимошенко); 2) гипотеза о тонкостенности оболочки; 3) статическая гипотеза о пренебрегании напряжением σ_{33} по сравнению с напряжениями σ_{ii} , 4) гипотеза, которую теперь необходимо отнести только к силовым напряжениям σ_{3i} .

3. Задача о распространении волн в упругой полосе (сравнение результатов точной и прикладной теории). Как было отмечено для построения общей прикладной модели микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений, принятые гипотезы 1)-4) являются результатом качественной стороны асимптотического решения трехмерной задачи микрополярной теории упругости в области тонкой оболочки (пластинки или прямоугольника). Так или иначе возникает вопрос о связи точного решения граничной задачи микрополярной теории упругости с решением соответствующей задачи на основе построенной прикладной теории оболочек (пластин или балок).

Как модельную задачу рассмотрим задачу о распространении волн в упругой полосе (плоская задача). Эта задача в рамках микрополярной теории упругости рассмотрена в работе [14], в которой на основе изучения точного дисперсионного уравнения показано, что в случае длинных волн точность прикладной теории микрополярной балки (одномерная задача) выражается формулой

$$1+\left(\frac{2h}{l}\right)^2\approx 1\,, \tag{3.1}$$

где l – длина волны, $2h$ – толщина полосы.

Рассмотрим теперь аналогичную задачу распространения волн в полосе в рамках классической динамической теории упругости (плоская задача) [10].

Будем считать, что в полосе в направлении $x_1\left(-\infty < x_1 < +\infty\right)$ распространяется периодическая волна с фазовой скоростью c. Определяя общее решение системы уравнений плоской динамической задачи классической теории упругости и удовлетворяя однородным граничным условиям для напряжений на лицевых линиях полосы $\left(x_2 = \pm h\right)$, в итоге приходим к дисперсионному уравнению [10] (для антисимметричной по x_2 задачи, т.е. для задачи изгиба полосы):

$$\frac{thkh\sqrt{1-\dfrac{c^2}{a^2}}}{thkh\sqrt{1-\dfrac{c^2}{b^2}}} = \frac{\left(2-\dfrac{c^2}{b^2}\right)^2}{4\sqrt{1-\dfrac{c^2}{a^2}}\sqrt{1-\dfrac{c^2}{b^2}}}, \tag{3.2}$$

где $a^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad b^2 = \dfrac{\mu}{\rho};$ $k -$ волновое число.

Если длина волны $l = \dfrac{2\pi}{k}$ очень велика по сравнению с толщиной полосы $2h$, то величины аргументов y гиперболических тангенсов в (3.2) будут малы при конечном значении c. В работе [10] гиперболические тангенсы в (3.2) заменены первыми членами в разложении соответствующего степенного ряда и таким образом обоснована классическая теория упругих балок. Заменяя в уравнении (3.2) гиперболические тангенсы первыми двумя членами в разложении соответствующего степенного ряда, в результате некоторых преобразований указанное дисперсионное уравнение можем привести к следующему окончательному виду:

$$\frac{\omega^2}{b^2} + \frac{4}{3}k^2h^2\zeta\frac{\omega^2}{b^2} - \frac{4}{3}k^4h^2\zeta - \frac{h^3}{3}\frac{\omega^4}{b^4} + \frac{h^2}{3}\frac{\omega^2k^2}{b^2} = 0\,, \tag{3.3}$$

где $\omega = ck, \quad \zeta = 1 - \dfrac{b^2}{a^2}.$

Рассмотрим поставленную задачу о распространении волны в направлении оси x_1 на основе прикладной одномерной теории динамического изгиба упругой балки.

Основные уравнения и граничные условия этой классической модели изгиба балки (без кручения) можем получить из общей модели упругой тонкой оболочки (2.1)-(2.4):

уравнения движения

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} - 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad N_{13} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \rho\frac{2h^3}{3}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0 \tag{3.4}$$

соотношения упругости

$$N_{13} = \frac{2Eh}{2(1+\nu)}\Gamma_{13}, \qquad M_{11} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}K_{11} \tag{3.5}$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{13} = \psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1}, \qquad K_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}. \tag{3.6}$$

Решение системы уравнений (3.4)-(3.6) представим в виде распространения периодической волны вдоль оси балки x_1 $(-\infty < x_1 < +\infty)$

$$\psi_1 = Ae^{i(kx_1-\omega t)}, \qquad w = Be^{i(kx_1-\omega t)}. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.7) в уравнения (3.4)-(3.6), относительно неизвестных коэффициентов A и B получим алгебраическую систему однородных уравнений. Приравниванием к нулю определителя этой системы приходим к дисперсионному уравнению в рамках прикладной модели упругой балки (3.4)-(3.6). После некоторых преобразований это дисперсионное уравнение примет вид (3.3).

Заключение. На основе модели микрополярных упругих тонких оболочек получена модель классической теории упругих тонких оболочек с учетом поперечных сдвиговых деформаций (уточненная классическая модель). Показано, что классическую уточненную теорию упругих тонких оболочек можно получить из трехмерной классической теории упругости на основе систем гипотез 1)-4). Гипотеза 1) – известная кинематическая гипотеза теории оболочек типа Тимошенко в классической теории упругости; гипотезы 2) и 3) тоже входят в систему гипотез Тимошенко; гипотеза 4) представляет совершенно новый подход (основанный на асимптотическом анализе граничной задачи трехмерной теории упругости в области тонкой оболочки) к определению касательных сдвиговых напряжений σ_{31} и σ_{32}. В известной работе [15] показано, что теория типа Тимошенко – Рейсснера, основанная на гипотезах 1)-3), асимптотически не совсем точна.

В данной работе показано, что построенная на основе гипотез 1)-4) двумерная теория упругих тонких оболочек (пластин и балок) является асимптотически точной.

Гюмрийский государственный педагогический
институт им. М. Налбандяна

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Построение уточненной классической теории упругих тонких оболочек по микрополярной теории

На основе метода гипотез, подтвержденного асимптотически, построена общая теория микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Получена классическая уточненная теория упругих тонких оболочек с учетом поперечных сдвиговых деформаций. Рассмотрена задача распространения гармонических волн в бесконечной полосе на основе систем уравнений и граничных условий плоской классической теории упругости и построенной классической модели упругих балок. Показано, что в случае длинных волн результаты обоих подходов совпадают.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Առաձգական բարակ թաղանթների դասական ճշգրտված տեսության կառուցումը միկրոպոլյար տեսությունից ելնելով

Ասիմպտոտիկ հիմնավորում ունեցող վարկածների մեթոդի հիման վրա կառուցվում է ազատ պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր տեսությունը: Միկրոպոլյար թաղանթների այս մոդելի հիման վրա ստացված է առաձգական բարակ թաղանթների դասական ճշգրտված տեսությունը: Դիտարկվում է անվերջ շերտում հարմոնիկ ալիքների տարածման խնդիրը առաձգականության հարթ տեսության դրվածքով և առաձգական բարակ հեծանների կառուցված դասական մոդելի հիման վրա: Ցույց է տրվում, որ երկար ալիքների դեպքում այս երկու մոտեցումներով ստացվում է միևնույն արդյունքը:

Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan

The Construction of Improved Classical Theory of Elastic Thin Shells on the Basis of Micropolar Theory

On the basis of asymptotically confirmed hypotheses method the general theory of micropolar elastic thin shells with free fields of displaycements and rotations is constructed. The classical theory of elastic thin shells with consideration of transverse shifts is obtained. The problem of distribution of harmonic waves in the infinite strip is studied on the basis of the system of equations and boundary conditions of plane classical theory of elastiaty and constructed classical model of elastic bars. It is shown that in the case of long waves results of the mentioned two approaches are the same.

Литература

1. *Морозов Н.Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л. Изд-во ЛГУ 1978. 182 с.
2. *Савин Г.Н.* Основы плоской задачи моментной теории упругости. Киев. Изд-во КГУ. 1965. 162 с.
3. *Саркисян С.О.* - ДНАН Армении. 2011. Т. 111. N 2. С. 121-128.
4. *Саркисян С.О.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. № 1. С. 58-67.
5. *Саркисян С.О.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. N 2. С. 52-62.
6. *Саркисян С.О.* - ДАН России. 2011. Т. 436. № 2. С. 195-198.
7. *Саркисян С.О.* – Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. N 1. С. 55-66.
8. *Саркисян С.О.*- ДНАН Армении. 2008. Т.108. № 4. С. 309-319.
9. *Саркисян А. А.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. № 2. С. 39-50.

10. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 862 с.
11. *Пелех Б.Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев. Наукова думка. 1973. 246 с.
12. *Перцев А.К., Платонов Э.Г.* Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Л. Судостроение. 1987. 316 с.
13. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т.* Методы расчета оболочек. В 5-и томах. Т.4. Теория оболочек переменной жесткости. Киев. Наукова думка. 1981. 544 с.
14. *Саркисян А.А.* - ДНАН Армении. 2011. Т. 111. N 4. С. 342-351
15. *Goldenveizer A.L., Kaplunov J.D., Nolde E.V.* - Int. J. Solids Structures. 1993. V. 30. N 5. P. 675-694.