НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 112 2012 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539.1

А. Н. Мартиросян, А. С. Динунц, А. В. Давтян

Решение задачи о горизонтальном штампе для упругой полуплоскости при движении с произвольной скоростью

(Представлено чл.-кор. НАН РА А. Г. Багдоевым 1/VII 2011)

Ключевые слова: *метод сверток, движущийся штамп, смешанные граничные задачи.*

В настоящей статье рассматривается упругая полуплоскость, в которой имеется горизонтальный штамп, движущийся вдоль границы при сквозном нулевом условии для нормального напряжения на границе. Получено выражение для σ_{xy}^{-} и вычислено значение коэффициента интенсивности напряжений, откуда видно, что на крае штампа имеется особенность вида $1/\sqrt{\ell(t)-x}$.

Решается плоская задача, когда вдоль границы изотропной упругой среды, занимающей полуплоскость $y>0$, движется горизонтальный штамп с произвольной скоростью по направлению оси Ox. Уравнения движения в перемещениях для изотропной упругой среды в плоском случае при отсутствии массовых сил имеют вид

$$a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$
$$a^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+b^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},\tag{1}$$

где U,V – компоненты перемещений, a, b – скорости продольных и поперечных волн. Рассмотрим следующую сингулярную граничную задачу *(y=0)*:

$$\sigma_{yy}=\rho\left[(\alpha^2-2b^2)\frac{\partial U}{\partial x}+\alpha^2\frac{\partial V}{\partial y}\right]=0\ ,-\infty<x<\infty\ ;$$

$$\sigma_{xy} = \sigma^{+}_{xy} = \rho b^2\left[\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right] = 0\,,\; x > \ell(t)\;; \tag{2}$$

$$U = U_{-} = -PH(x-\xi)H(t-\tau)\,,\; x < \ell(t)\;;$$

$$U,V = O(r^{1/2}), r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \quad \text{(условие на ребре)},$$

где $P=const$, ρ – плотность среды, $H(x)$ – единичная функция. При $t = 0$ имеем нулевые начальные условия. Решение задачи (2) ищется методом интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по x. Применяя это преобразование к уравнениям (1) и к граничному условию (2), получаем связь между перемещением и напряжением в виде

$$\bar{\bar{U}} = \bar{\bar{S}}\bar{\bar{\sigma}}_{xy}, \tag{3}$$

где

$$\bar{\bar{S}} = \frac{-s^2\bar{\beta}_2}{b^4\rho i R(\bar{\alpha})}, \bar{\beta}_n = i\sqrt{\frac{s^2}{c_n^2}+\bar{\alpha}^2}, c_1 = a, c_2 = b\,,$$

$$R(\bar{\alpha}) = \left(\frac{s^2}{b^2}+2\bar{\alpha}^2\right)^2 - 4\bar{\alpha}^2\sqrt{\frac{s^2}{a^2}+\bar{\alpha}^2}\sqrt{\frac{s^2}{b^2}+\bar{\alpha}^2}.$$

Отметим, что оригинал $S(t,x)$, соответствующий $\bar{\bar{S}}$, равен $U(t,x)$ при $\sigma(t,x)=\delta(t)\delta(x)$, где $\delta-$функция Дирака. Полагая $0<\dot{\ell}(t)<c_R$, функцию $\bar{\bar{S}}(\bar{\alpha},s)$ можно представить в виде [4,5]

$$\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{S}}_{+}\bar{\bar{S}}_{-},$$

где

$$\bar{\bar{S}}_{+}(\bar{\alpha},s) = \frac{\sqrt{\frac{s}{b}-i\bar{\alpha}}}{\frac{s}{c_R}-i\bar{\alpha}}D_{+}\left(i\frac{\bar{\alpha}}{s}\right),$$

$$\bar{\bar{S}}_{-}(\bar{\alpha},s) = \frac{-a^2\sqrt{\frac{s}{b}+i\bar{\alpha}}}{2\rho b^2\left(a^2-b^2\right)\left(\frac{s}{c_R}+i\bar{\alpha}\right)}D_{-}\left(i\frac{\bar{\alpha}}{s}\right), \tag{4}$$

$$D_{\pm}\left(i\frac{\bar{\alpha}}{s}\right) = 1+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1/a}^{1/b}\frac{F_1(u)\,du}{u\mp i\frac{\bar{\alpha}}{s}}\,,\; D_{\pm}^{-1}\left(i\frac{\bar{\alpha}}{s}\right) = 1+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1/a}^{1/b}\frac{F_2(u)\,du}{u\mp i\frac{\bar{\alpha}}{s}}\,,$$

$$\chi(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{1/a}^{1/b}\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-u}, \tag{5}$$

$$F_1(u) = \gamma(u)\exp\left[\chi(u)\right],\; F_2(u) = -\gamma(u)\exp\left[-\chi(u)\right],$$

$$\gamma(u)=\frac{\frac{4}{\pi}u^2\sqrt{1/b^2-u^2}\sqrt{u^2-1/a^2}}{\sqrt{\left(b^2-2u^2\right)^4+16u^4\left(1/b^2-u^2\right)\left(u^2-1/a^2\right)}}.$$

Из формулы (5) с помощью обратных преобразований, используя такие преобразования, как интегрирование по частям, дифференцирование по параметру под знаком интеграла, вычисление интеграла с помощью вычетов, учитывая (6), получаем

$$S_+(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\frac{\partial}{\partial t}\left\{H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{a}\right)\left[1-\frac{\sqrt{\frac{1}{c_R}-\frac{1}{b}}}{\sqrt{\frac{1}{c_R}-\frac{t}{x}}}BH\left(\frac{1}{c_R}-\frac{t}{x}\right)H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{b}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int\limits_{t/x}^{1/b}\frac{\left(\frac{1}{b}-u\right)F_1(u)\,du}{\left(\frac{1}{c_R}-u\right)\sqrt{\frac{t}{x}-u}}duH\left(\frac{1}{b}-\frac{t}{x}\right)t\right]\right\},$$

$$B=1-\int\limits_{1/a}^{1/b}F_1(u)\frac{du}{1/c_R-u}. \qquad (6)$$

Аналогичным образом, учитывая, что $\overline{\overline{P}}_{\pm}=1/\overline{\overline{S}}_{\pm}$, можно получить выражение для оригинала $P_+(t,x)$ в следующем виде:

$$P_+(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{c_R}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot$$

$$\cdot\left\{\left[D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\delta\left(t-\frac{x}{b}\right)+\int\limits_{1/a}^{1/b}F_3(h)\,\delta(t-hx)\,dh\right]\frac{H(x)}{\sqrt{x}}\right\}, \qquad (7)$$

$$F_3(h)=1-\int\limits_{1/b}^{h}\left[\frac{d}{du}\frac{F_2(u)}{\sqrt{1/b-u}}\right]\frac{du}{\sqrt{h-u}}\ ,\ D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)=1+\int\limits_{1/a}^{1/b}\frac{F_2(u)\,du}{u-1/b},$$

функции $S_-(t,x);P_-(t,x)$ получаются из $S_+(t,x);P_+(t,x)$ заменой x на $-x$ и умножением, соответственно, на постоянные $-a^2\left(2\rho b^2\left(a^2-b^2\right)\right)^{-1}$ и $-2pb^2\left(a^2-b^2\right)a^{-2}$. Обозначим $U(t,x)=U_+(t,x)$ при $x>\ell(t)$, $\sigma_{xy}=\sigma_{xy}^-(t,x)$ при $x<\ell(t)$. Из формулы (6), (7) нетрудно заметить, что функция $\overline{\overline{S}}(s,\bar{\alpha})$ такова, что указанная выше факторизация приводит к функциям $\overline{\overline{S}}_{\pm},\overline{\overline{P}}_{\pm}$, оригиналы которых удовлетворяют условиям

$$S_+(t,x) = P_+(t,x) = 0 \text{ при } x < c_R t,$$

$$S_-(t,x) = P_-(t,x) = 0 \text{ при } x > -c_R t, -c_R < \dot{\ell}(t) = d\ell/dt < c_R. \qquad (8)$$

Тогда для функций $U(t,x); \sigma_{xy}(t,x)$, как в [1-3], можно получить решение поставленной задачи в форме сверток по x, t в виде

$$U_+ = -S_+ ** \left[\left(P_+ ** U_- \right) H(x-\ell) \right], \sigma_{xy}^- = P_- ** \left[\left(P_+ ** U_- \right) H(\ell - x) \right]. \quad (9)$$

Поскольку из (1) имеем, что $U_- = -PH(x-\xi) H(t-\tau)$, можно с учетом (6) $P_+ ** U_-$ представить в виде

$$P_+ ** U_- = \frac{P}{\sqrt{\pi}} \left\{ -\frac{b}{c_R} D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right) \frac{H(t-\tau) H(x-\xi-b(t-\tau))}{\sqrt{b}\sqrt{t-\tau}} - \right.$$

$$-\frac{1}{c_R} \int_{1/a}^{1/b} \frac{F_3(u)}{\sqrt{u}} \frac{H(x-\xi-(t-\tau)/u)}{\sqrt{t-\tau}} du + D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right) \frac{H(x-\xi)}{\sqrt{x-\xi}} \cdot$$

$$\left. \cdot H\left(t-\tau-\frac{x-\xi}{b}\right) + \int_{1/a}^{1/b} \frac{F_3(u) H(t-\tau-u(x-\xi))}{\sqrt{x-\xi}} du \right\}. \qquad (10)$$

Подставляя выражения $P_+ ** U_-$ и $P_-(t,x)$ в (9), после громоздких вычислений получим

$$\sigma_{xy}^- = \frac{2b^2(a^2-b^2)\rho P}{a^2 \pi} \left(D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right) \frac{b\left(1+\dot{\ell}(t_0'')/c_R\right)}{b+\dot{\ell}(t_0'')} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{H(t-t_0'')}{\sqrt{\ell(t_0'')-x}} I_1 + I_2 + I_3 + \left(\frac{1}{c_R}\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\xi} \right) I_4 \right), \qquad (11)$$

где

$$I_1 = \sqrt{b} D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right) \frac{H(1-L_0) H(t_0''-\tau)}{\sqrt{t_0''-\tau}} - D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right) \frac{H(\ell(t_0'')-\xi) H(L_0-1)}{\sqrt{\ell(t_0'')-\xi}} +$$

$$+ \frac{1}{c_R} \int_{1/a}^{1/b} \frac{F_3(u) H(ub-L_0)}{\sqrt{u}} du - \int_{1/a}^{1/b} \frac{F_3(u) H(L_0-ub)}{\sqrt{\ell(t_0'')-\xi}} du,$$

$$I_2 = D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right) \int_{1/a}^{1/b} \frac{F_3(h) H(t-t_1'')}{\sqrt{\ell(t_1'')-x}} \frac{1+\dot{\ell}(t_1'')/c_R}{1/h + \dot{\ell}(t_1'')} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{b}{c_R} \frac{H(t_1''-\tau) H(1-L_1)}{\sqrt{b(t_1''-\tau)}} - \frac{H(\ell(t_1'')-\xi) H(L_1-1)}{\sqrt{\ell(t_1'')-\xi}} \right) dh, \qquad (12)$$

$$I_3=\int\limits_{1/a}^{1/b}\frac{F_3\left(h\right)H\left(t-t_1''\right)}{\sqrt{\ell\left(t_1''\right)-x}}\frac{1+\dot{\ell}\left(t_1''\right)/c_R}{1/h+\dot{\ell}\left(t_0''\right)}\int\limits_{1/a}^{1/b}\left(\frac{H\left(bu-L_1\right)}{c_R\sqrt{u}\sqrt{t_1''-\tau}}-\frac{H\left(L_1-bu\right)}{\sqrt{\ell\left(t_1''\right)-\xi}}\right)F_3\left(u\right)du\,dh,$$

$$I_4=b\left[D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\right]^2\left(\ln\left|\frac{\varphi_0-1}{\varphi_0+1}\right|H\left(L_0-1\right)+\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{T-1}{T+1}}-1}{\sqrt{\frac{T-1}{T+1}}+1}\right|H\left(1-L_0\right)-\frac{2}{c_R}arctg\frac{\sqrt{t-t_0''}}{\sqrt{t_0''-\tau}}+\frac{2}{c_R}H\left(T-1\right)arctg\sqrt{\frac{T-1}{T+1}}\right)-$$

$$-\frac{2b\sqrt{b}D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)}{c_R}\int\limits_{L_0/b}^{1/b}\frac{F_3\left(u\right)}{\sqrt{u}}\left(arctg\frac{\sqrt{t-t_0''}}{\sqrt{t_0''-\tau}}-H\left(T-1\right)arctg\sqrt{\frac{\frac{T}{ub}-1}{uT+1}}\right)du+bD_+^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{b}\right)\left[\ln\left|\frac{\varphi_0-1}{\varphi_0+1}\right|\int\limits_{1/a}^{L_0/b}\frac{d}{du}\frac{2F_2\left(u\right)\sqrt{L_0-ub}}{\sqrt{1-ub}}du+\int\limits_{L_0/b}^{1/b}F_3\left(h\right)\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{T-hb}{T+1}}-1}{\sqrt{\frac{T-hb}{T+1}}+1}\right|dh\right]-$$

$$-\frac{2bD_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)}{c_R}\int\limits_{1/a}^{1/b}\frac{F_3\left(h\right)}{\sqrt{h}}\left(arctg\frac{\sqrt{t-t_1''}}{\sqrt{t_1''-\tau}}-H\left(T-1\right)arctg\sqrt{\frac{T-1}{\frac{T}{hb}+1}}\right)dh-$$

$$-\frac{2}{c_R}\int\limits_{1/a}^{1/b}\frac{F_3\left(h\right)}{\sqrt{h}}dh\int\limits_{1/a}^{1/b}\frac{F_3\left(u\right)}{\sqrt{u}}\left(arctg\frac{\sqrt{t-t_1''}}{\sqrt{t_1''-\tau}}-H\left(bu-T\right)arctg\sqrt{\frac{\frac{T}{ub}-1}{\frac{T}{hb}+1}}\right)du+$$

$$+D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\int\limits_{1/a}^{1/b}F_3\left(h\right)\left(\ln\left|\frac{\varphi_1+1}{\varphi_1-1}\right|H\left(L_1-1\right)+\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{T-1}{T+hb}}+1}{\sqrt{\frac{T-1}{T+hb}}-1}\right|H\left(1-L_1\right)\right)dh+$$

$$+\int\limits_{1/a}^{1/b}F_3\left(h\right)dh\int\limits_{1/a}^{1/b}F_3\left(u\right)\left(\ln\left|\frac{\varphi_1-1}{\varphi_1+1}\right|H\left(T-bu\right)+H\left(bu-T\right)\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{T-ub}{T+ub}}+1}{\sqrt{\frac{T-ub}{T+ub}}-1}\right|\right)du$$

$$T=\frac{b\left(t-\tau\right)}{x-\xi},\ \varphi_n=\sqrt{\frac{\ell\left(t_n''\right)-\xi}{\ell\left(t_n''\right)-x}},\ L_n=\frac{b\left(t_n''-\tau\right)}{\ell\left(t_n''\right)-\xi},\ F_3\left(h\right)=\int\limits_{1/a}^{h}\frac{d}{du}\left(\frac{F_2\left(u\right)}{\sqrt{1/b-u}}\right)\frac{du}{\sqrt{h-u}},$$

$$\ell\left(t_n''\right)-x-\frac{t-t_n''}{h_n}=0, h_0=\frac{1}{b}, h_1=h, n=0;1.$$

Рассмотрим поведение решения (11) в окрестности точки смены граничных условий. Для этого вычислим коэффициент интенсивности напряжений при $x\to\ell(t)-0.$ Так как при $x\to\ell(t)$ $t_n''\to t$, то, записывая $\ell(t_n'')\approx\ell(t)+\dot{\ell}(t)(t_n''-t)$ для малых $t_n''-t$, можно получить $\ell(t_n'')-x\approx$ $\approx\ell(t)-x+\dot{\ell}(t)(t_n''-t)$. Из (12), подставляя $t-t_n=h_n(\ell(t_n)-x)$, формулу (11) можно записать в виде [2-4] $l(t_n'')-x\approx\ell(t)-x-h_n\dot{\ell}(t)(\ell(t_n'')-x)$ или

$$\frac{\ell(t)-x}{\ell(t_0'')-x}\to 1+h_n\dot{\ell}(t) \text{ при } x\to\ell(t)-0. \tag{13}$$

Из (11), (12) можно с учетом (13) сразу получить значение коэффициента интенсивности напряжений в виде

$$\lim_{x\to l(t)-0}\left(\sigma_{xy}^{-}\sqrt{l(t)-x}\right)=\frac{2b^2\left(a^2-b^2\right)\rho P\left(1+\frac{\dot{l}(t)}{c_R}\right)}{a^2\pi}\left\{\frac{D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)}{\sqrt{1+\frac{\dot{l}(t)}{b}}}\right.$$

$$\left(bD_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)H(1-T)-D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\sqrt{T}H(T-1)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c_R}\int_{1/a}^{1/b}\frac{\sqrt{b(t-\tau)}}{\sqrt{u}}F_3(u)H(ub-T)\,du-\int_{1/a}^{1/b}\sqrt{T}F_3(u)H(T-ub)\,du\right)+$$

$$D_+^{-}\left(\frac{1}{b}\right)\int_{1/a}^{1/b}\frac{hF_3(h)}{\sqrt{1+h\dot{l}(t)}}\left(\frac{b}{c_R}\frac{H(1-T)}{\sqrt{b(t-\tau)}}-\sqrt{T}\frac{H(T-1)}{\sqrt{b(t-\tau)}}\right)dh+$$

$$\left.+\int_{1/a}^{1/b}\frac{F_3(h)h}{\sqrt{1+h\dot{l}(t)}}\int_{1/a}^{1/b}\left(\frac{\sqrt{b}}{c_R\sqrt{u}}\frac{H(ub-T)}{\sqrt{b(t-\tau)}}-\frac{\sqrt{T}H(T-ub)}{\sqrt{b(t-\tau)}}\right)F_3(u)\,du\,dh\right\}. \tag{14}$$

В результате получается, что если под штампом задана постоянная нагрузка, имеется особенность вида $1\Big/\sqrt{\ell(t)-x}$. Отметим, что можно получить коэффициент интенсивности напряжений и при произвольной нагрузке.

Горисский государственный университет

А. Н. Мартиросян, А. С. Динунц, А. В. Давтян

Решение задачи о горизонтальном штампе для упругой полуплоскости при движении с произвольной скоростью

Методом сверток решается задача о движении горизонтального штампа с произвольной скоростью по границе упругой полуплоскости.

Ա. Ն. Մարտիրոսյան, Ա. Ս. Դինունց, Ա. Վ. Դավթյան

Կամայական արագությամբ շարժվող հորիզոնական դրոշմի խնդրի լուծումը առաձգական կիսահարթության համար

Փաթույթների մեթոդով լուծված է հորիզոնական դրոշմի վերաբերյալ խնդիրը, երբ այն կամայական արագությամբ շարժվում է կիսահարթության մակերեսով:

A. N. Martirosyan, A. S. Dinunts, A. V. Davtyan

Unsteady Problem on Dynamics of Stamps Moving with Arbitrary Velocity

By convolution method the problem on motion with arbitrary velocity on boundary of elastic half-plane the horizontal stamp are solved.

Литература

1. *Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В.*- ДНАН РА. 2010. Т.110. N2. С.151-162.
2. *Bagdoev A.G., Martirosyan G.A., Martirosyan A.N., Dinunts A.S., Davtyan A.V.* In: VII Int. Conf. ‘’The Problems of Dynamics of Interaction of Deformable Media’’. Goris, Armenia. 2011. P. 8.
3. *Мартиросян А. Н.* Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред. “Зангак-97’’. 2007. С. 244.
4. *Винер Н., Пэли П.* Преобразование Фурье в комплексной области. М. Наука. 1964. 268 с.
5. *Мхитарян С.М., Шекян А.Л., Шекян Л. А.* В кн.: Материалы VI междунар. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис - Степанакерт. 2008. С. 345-349.