ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 112 2012 № 2

МЕХАНИКА

УДК 539.1

А. Н. Мартиросян, А. С. Динунц, А. В. Давтян

Нестационарная задача о залечивании трещины, движущейся с переменной скоростью

(Представлено чл.-кор. НАН РА А. Г. Багдоевым 1/VII 2011)

Ключевые слова: *метод сверток, движущиеся трещины, смешанные граничные задачи.*

В настоящей статье исследуются нестационарные смешанные задачи для полуплоскости, когда точка раздела граничных условий движется с переменной скоростью. Рассматривается полубесконечная трещина, в которой содержится жидкость с примесями и край которой движется по произвольному закону $x = l(t)$. В граничных условиях учитывается наращивание границы трещины; показано, что на крае трещины, т.е. при $x \to \ell(t)$, особенностей не имеется. Приведено решение задачи наращивания границы трещины, край которой движется с произвольной скоростью, при наличии износа в изотропной упругой среде.

Пусть край полубесконечной трещины, в которой содержится жидкость (флюид) с примесями, двигается по произвольному закону вдоль оси x в изотропной упругой среде. В случае нулевой скорости движения края трещины задача наращивания границы трещины аналитически и численно исследована в [1, 2], с обсуждениями возможных применений результатов к геотермальным, технологическим, биологическим трещинам. Вместе с тем представляет интерес изучение соответствующих задач залечивания подобных полостей и разломов, условно называемых в [1, 2] трещинами, когда, кроме потока флюида в них [1, 2], имеется движение самого края разлома с произвольной скоростью, причем подобного рода задачи рассматривались в разных вариантах в [3].

Рассмотрим следующую задачу, когда граничные условия имеют вид $(y = 0)$

$$\sigma_{xy} = 0 - \infty < x < \infty ; \quad V = 0 , \;\; x > l(t),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\left\{\frac{K\left(\bar{a}^2-2b^2\right)\rho}{\rho_s}+\xi\right\}\frac{\partial U}{\partial x}+\left(\frac{K\bar{a}^2}{\rho_s}+\xi\right)\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{i_0}{\rho_s}H(x-\xi)H(t-\tau),\ x<l(t),\xi<l(\tau), \quad (1)$$

где $l(t)$ – закон движения края трещины, K – коэффициент вертикального износа. При $t=0$ имеем нулевые начальные условия. Решение задачи (1) ищется методом интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по x. Обозначив через $\overline{U},\overline{V}$ преобразования Лапласа по t от U,V и через $\overline{\overline{U}},\overline{\overline{V}}$ преобразования Фурье по x от $\overline{U},\overline{V}$, решение задачи ищется в виде

$$\overline{U};\overline{V}=\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\bar{\alpha}x+i\bar{\beta}_n y}\,\overline{\overline{U}}_n;\overline{\overline{V}}_n\,d\bar{\alpha}, \quad (2)$$

$s=-i\omega-$ параметр преобразования Лапласа по t и имеют место соотношения

$$\bar{\beta}_n=\sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2}-\bar{\alpha}^2},\ c_1=\bar{a},\ c_2=b,\ \overline{\overline{V}}_1=\frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\bar{\alpha}}}\overline{\overline{U}}_1,\ \overline{\overline{V}}_2=-\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\bar{\beta}}_2}\overline{\overline{U}}_2. \quad (3)$$

Подставляя (2) в граничные условия (1), получим уравнение

$$\overline{\overline{\Omega}}=iC_0R\left(\bar{\alpha}\right)\bar{\beta}_2\overline{\overline{V}}, \quad (4)$$

где используются обозначения

$$\overline{\overline{\Omega}}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-st-i\bar{a}x}\left(\frac{\partial V}{\partial t}+K_2\frac{\partial U}{\partial x}+K_3\frac{\partial V}{\partial y}\right)dtdx, \quad (5)$$

$$R\left(\bar{\alpha}\right)=\frac{-\bar{\beta}_1\omega^3+\bar{\alpha}^2b^2K_2\left(\bar{\beta}_2^2-\bar{\alpha}^2-2\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\right)+K_3b^2\left(\bar{\beta}_1^2\left(\bar{\beta}_2^2-\bar{\alpha}^2\right)+2\bar{\alpha}^2\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\right)}{\omega^2\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2C_0},$$

$$C_0=\left(K_2+K_3\right)b^2\bar{a}^{-2},\ K_2=\frac{K\left(\bar{a}^2-2b^2\right)\rho}{\rho_s}+\xi,\ K_3=\frac{K\bar{a}^2\rho}{\rho_s}+\xi.$$

Функция $R(\bar{\alpha})$ в комплексной плоскости $\bar{\alpha}$ имеет два чисто мнимых и два вещественных корня: $\bar{\alpha}_{1,3}=\pm\frac{\omega}{a}\alpha_{1,3},\bar{\alpha}_{2,4}=\pm\frac{\omega}{a}i\alpha_{2,4};\alpha_1,\alpha_2\in R$ и $R(\bar{\alpha})\to1$ при $\bar{\alpha}\to\infty$. После выбора ветвей функций $\bar{\beta}_n$, используя теорему Винера – Пэли [4], получаем факторизацию функции $R(\bar{\alpha})$ в следующем виде:

$$R\left(\bar{\alpha}\right)=R^+\left(\bar{\alpha}\right)R^-\left(\bar{\alpha}\right),\ R\pm\left(\bar{\alpha}\right)=G_\pm\left(\bar{\alpha}\right)\frac{\left(\bar{\alpha}\pm\frac{\omega}{a}\alpha_1\right)\left(\bar{\alpha}\pm\frac{\omega}{a}i\alpha_2\right)}{\left(\frac{\omega}{\bar{a}}\pm\bar{\alpha}\right)^{1/2}\left(\frac{\omega}{b}\pm\bar{\alpha}\right)^{3/2}}, \quad (6)$$

где $R^+\left(\bar{\alpha}\right)$ и $R^-\left(\bar{\alpha}\right)$ – аналитические и отличные от нуля функции, соответственно, в полуплоскостях $\mathrm{Im}\left(\bar{\alpha}\right)>0$ и $\mathrm{Im}\left(\bar{\alpha}\right)<0$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\overline{\overline{V}}=\overline{\overline{S}}_+\overline{\overline{S}}_-\overline{\overline{\Omega}}, \quad (7)$$

где $\overline{\overline{S}}_{+} = \dfrac{\left(\omega/b+\overline{\alpha}\right)\left(\omega/\overline{a}+\overline{\alpha}\right)^{1/2}}{\left(\overline{\alpha}+\omega\alpha_1/\overline{a}\right)\left(\overline{\alpha}+\omega i\alpha_2/\overline{a}\right)} G_{+}^{-1}\left(\overline{\alpha}\right),$

$$\overline{\overline{S}}_{-} = \frac{1}{iC_0}\frac{\left(\omega/b-\overline{\alpha}\right)\left(\omega/\overline{a}-\overline{\alpha}\right)^{1/2}}{\left(\overline{\alpha}-\omega\alpha_1/\overline{a}\right)\left(\overline{\alpha}-\omega i\alpha_2/\overline{a}\right)} G_{-}^{-1}\left(\overline{\alpha}\right),$$

$$G^{-}\left(\overline{\alpha}\right) = Exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_1^{\overline{a}/b} arctg\,\frac{\overline{a}^3/b^2\sqrt{\zeta^2-1}+2\left(K_2-K_3\right)\zeta^2\sqrt{\zeta^2-1}\sqrt{\overline{a}^2/b^2-\zeta^2}}{\left(K_3\left(\zeta^2-1\right)-K_2\zeta^2\right)\left(2\zeta^2-\overline{a}^2/b^2\right)}\frac{d\zeta}{\zeta-a\overline{\overline{\alpha}}/\omega}\right\}, \overline{\overline{P}}_{\pm} = \frac{1}{\overline{\overline{S}}_{\pm}}. \quad (8)$$

Важно отметить, что особые точки функции $\overline{\overline{S}}_{\pm}$ находятся, соответственно, в нижней и верхней полуплоскости. Вычисляем оригиналы $S_{\pm}(t,x); P_{\pm}(t,x)$ по формуле обращения

$$f\left(t,x\right) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} ds\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\overline{f}}\left(s,\overline{\alpha}\right)\exp\left(st-i\overline{\alpha}x\right)d\overline{\alpha}. \quad (9)$$

Произведя во внутреннем интеграле подстановку $\overline{\alpha} = \omega\alpha/a$ и используя представление

$$s^{\lambda}\Gamma\left(-\lambda\right) = \int_0^{\infty} t_1^{-\lambda-1}\exp\left(-st_1\right)dt_1, \lambda = 0.5;1.5, \quad (10)$$

для $S_{-}(t,x); P_{-}(t,x)$ можно записать

$$S_{+}\left(t,x\right) = \frac{\sqrt{i}}{4\pi^2 i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} ds\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\int_0^{\infty}\frac{\left(\overline{a}/b-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}G_{-}^{-1}(\alpha)}{\Gamma(-0.5)\sqrt{\overline{a}}\,(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2 i)t_1^{3/2}}\exp\left[s\left(t-t_1-\alpha x/\overline{a}\right)\right]dt_1. \quad (11)$$

Интеграл в (11) по переменной s дает δ-функцию от аргумента $t-t_1-\alpha x/\overline{a}$. Вычисляя интеграл от $\delta\left(t-t_1-\alpha x/\overline{a}\right)$ функции по переменой t_1, формулу (11) можно привести к следующему виду:

$$S_{+}\left(t,x\right) = \frac{\sqrt{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\overline{a}/b-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}G_{-}^{-1}(\alpha)\,d\alpha}{\Gamma\left(-0.5\right)\sqrt{\overline{a}}\left(\alpha-\alpha_1\right)\left(\alpha-\alpha_2 i\right)\left(t-\alpha x/\overline{a}\right)^{3/2}}. \quad (12)$$

Так как при $x>0$ подынтегральное выражение в формуле (12) является аналитической функцией от переменной α в верхней полуплоскости плоскости α, можно деформировать путь интегрирования в формуле (12) в нижней полуплоскости плоскости α при $x>0$. Тогда можно записать

$$S_{+}\left(t,x\right) = \frac{2H\left(x\right)}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}H\left(\frac{\overline{a}t}{x}-1\right)\int_1^{\overline{a}t/x}\frac{i\sqrt{i}\left(\overline{a}/b-\alpha\right)\sqrt{\alpha-1}G_{-}^{-1}\left(\alpha\right)d\alpha}{\Gamma\left(-0.5\right)\sqrt{\overline{a}}\left(\alpha-\alpha_1\right)\left(\alpha-\alpha_2 i\right)\sqrt{t-\alpha x/\overline{a}}} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{2i\sqrt{i}\left(\bar{a}/b-\alpha_2 i\right)\sqrt{\alpha_2 i-1}G_-^{-1}\left(\alpha_2 i\right)}{\Gamma\left(-0.5\right)\sqrt{\bar{a}}\left(\alpha_2 i-\alpha_1\right)\sqrt{t-\alpha_2 ix/\bar{a}}}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{2i\sqrt{i}\left(\bar{a}/b-\alpha_1\right)\sqrt{1-\alpha_1}G_-^{-1}\left(\alpha_1\right)}{\Gamma\left(-0.5\right)\sqrt{\bar{a}}\left(\alpha_1-\alpha_2 i\right)\sqrt{t-\alpha_1 x/\bar{a}}}\ . \quad (13)$$

Чтобы облегчить дальнейшие вычисления, функции $G_\pm(\alpha), G_\pm^{-1}(\alpha)$ можно представить в несколько иной форме. Функции $G_\pm(\alpha), G_\pm^{-1}(\alpha)$ являются аналитическими на всей комплексной полуплоскости α за исключением точек, принадлежащих разрезам $\left[\pm 1; \pm\bar{a}/b\right]$. Если замкнутые линии охватывают разрезы по отдельности, то значения аналитических во внешней области функций определяются их граничными значениями по формуле Коши для неограниченных областей

$$G_\pm\left(\alpha\right)=1+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\pm}\frac{G_\pm\left(\zeta\right)}{\zeta-\alpha}d\zeta, \qquad G_\pm^{-1}\left(\alpha\right)=1+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\pm}\frac{G_\pm^{-1}\left(\zeta\right)}{\zeta-\alpha}d\zeta\ .$$

Контуры $C_\pm$ обходятся по часовой стрелке. Деформацией контуров на вещественную ось новые выражения для функций приводятся к следующему виду:

$$G_\pm\left(\alpha\right)=1+\int\limits_1^{\bar{a}/b}\frac{F_1\left(u\right)du}{u\pm\alpha}, G_\pm^{-1}\left(\alpha\right)=1+\int\limits_1^{\bar{a}/b}\frac{F_2\left(u\right)du}{u\pm\alpha}, \quad (14)$$

где

$$F_1\left(u\right)=\frac{\left(\beta_1^*\frac{\bar{a}^2}{b^2}+2\frac{K_2-K_3}{\bar{a}}u^2\beta_1^*\beta_2\right)}{\pi\sqrt{\left(\beta_1^*\frac{\bar{a}^2}{b^2}+2\frac{K_2-K_3}{\bar{a}}u^2\beta_1^*\beta_2\right)^2+\left(\zeta^2-\beta_2^2\right)^2\left(\frac{K_3}{\bar{a}}\left(\beta_1^*\right)^2-\frac{K_2}{\bar{a}}u^2\right)^2}}G_-\left(u\right),$$

$$F_2\left(u\right)=\frac{-\left(\beta_1^*\frac{\bar{a}^2}{b^2}+2\frac{K_2-K_3}{\bar{a}}u^2\beta_1^*\beta_2\right)}{\pi\sqrt{\left(\beta_1^*\frac{\bar{a}^2}{b^2}+2\frac{K_2-K_3}{\bar{a}}u^2\beta_1^*\beta_2\right)^2+\left(\zeta^2-\beta_2^2\right)^2\left(\frac{K_3}{\bar{a}}\left(\beta_1^*\right)^2-\frac{K_2}{\bar{a}}u^2\right)^2}}G_-^{-1}\left(u\right),$$

$$\beta_1^*\left(u\right)=\sqrt{u^2-1}, \beta_2\left(u\right)=\sqrt{u^2-\frac{\bar{a}^2}{b^2}}\ .$$

В формуле (13), произведя подстановку $y=\sqrt{\alpha-1}\Big/\sqrt{t-\alpha x/\bar{a}}$ и используя теорему Коши о вычетах, можно после нескольких преобразований (интегрирование по частям и дифференцирование по параметру под знаком интеграла) получить

$$S_+\left(t,x\right)=\frac{2i\sqrt{i}H\left(x\right)}{\Gamma\left(-0.5\right)\sqrt{x}}\frac{\partial}{\partial t}\left\{H\left(\frac{\bar{a}t}{x}-1\right)\left[1-\int\limits_{\bar{a}t/x}^{\bar{a}/b}\frac{\left(\bar{a}/b-u\right)\sqrt{u-1}F_2\left(u\right)du}{\left(u-\alpha_1\right)\left(u-\alpha_2 i\right)\sqrt{u-\bar{a}t/x}}H\left(\frac{1}{b}-\frac{t}{x}\right)\right]\right\}. \quad (15)$$

Аналогичным образом можно получить выражение для оригинала $P_+\left(t,x\right)$:

$$P_+(t,x) = -\frac{1}{2i\sqrt{\pi i}\,\overline{a}^{-3/2}\sqrt{x}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{H\left(\frac{\overline{a}t}{x}-1\right)\left[\frac{\left(\alpha_1-\overline{a}/b\right)\left(\alpha_2 i-\overline{a}/b\right)}{\sqrt{1/b-t/x}\sqrt{\overline{a}/b-1}}\left(1-\int_1^{\overline{a}/b}\frac{F_1(u)}{\overline{a}/b-u}du\right)H\left(\frac{1}{b}-\frac{t}{x}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{4x\left(1-\overline{a}/b+\alpha_1+\alpha_2 i\right)}{\sqrt{\overline{a}}}+\sqrt{\overline{a}}\int_1^{\frac{\overline{a}}{b}}F_1(u)\,du+\pi\int_{\frac{\overline{a}t}{x}}^{\frac{\overline{a}}{b}}\frac{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2 i)F_1(u)\,du}{\left(\overline{a}/b-u\right)\sqrt{u-1}\sqrt{u-\overline{a}t/x}}H\left(\frac{1}{b}-\frac{t}{x}\right)\right]\right\},$$

а функции $S_-(t,x); P_-(t,x)$ получаются, соответственно, от $S_+(t,x); P_+(t,x)$ заменой x на $-x$ и умножением на постоянные $1/iC_0$ и iC_0. Представим изображения функций $\Omega(t,x); V(t,x)$ (обозначения их $\overline{\overline{\Omega}}(s,\alpha); \overline{\overline{V}}(s,\alpha)$) в виде

$$\overline{\overline{\Omega}} = \overline{\overline{\Omega}}_+ + \overline{\overline{\Omega}}_-, \quad \overline{\overline{V}} = \overline{\overline{V}}_+ + \overline{\overline{V}}_-, \quad \overline{\overline{V}}_+ = 0\,, \tag{16}$$

где $\overline{\overline{\Omega}}_+(t,x)$; $\overline{\overline{V}}_-(t,x)$ - не известны и подлежат определению.

Для оригиналов $\Omega(t,x); V(t,x)$ имеем

$$\begin{aligned} V(t,x) &= V_+(t,x)H\left(x-l(t)\right)+V_-(t,x)H\left(l(t)-x\right);\\ \Omega(t,x) &= \Omega_+(t,x)H\left(x-l(t)\right)+\Omega_-(t,x)H\left(l(t)-x\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $\Omega(t,x) = \Omega_+(t,x)$ при $x > l(t)$, $V = V_-(t,x)$ при $x < l(t)$ не известны. Из формулы (15) нетрудно заметить, что функция $\overline{\overline{S}}\left(s,\overline{\alpha}\right)$ такова, что указанная выше факторизация приводит к функциям $\overline{\overline{S}}_\pm, \overline{\overline{P}}_\pm$, оригиналы которых удовлетворяют условиям

$$S_+(t,x) = P_+(t,x) = 0 \text{ при } x < bt,$$

$$S_-(t,x) = P_-(t,x) = 0 \text{ при } x > -bt\,, -b < \dot{l}(t) = dl/dt < b\,. \tag{18}$$

Подставляя (15), (16) в (17) и учитывая (18), можно, как в [3], получить решение поставленной задачи в форме сверток по x , t в виде

$$V_- = S_- ** \left[\left(S_+ ** \Omega_- - P_- ** V_+\right)H\left(l-x+0\right)\right],$$

$$\Omega_+ = -P_+ ** \left[\left(S_+ ** \Omega_- - P_- ** V_+\right)H\left(x-\ell+0\right)\right]. \tag{19}$$

Поскольку из (1) имеем, что $\Omega_- = -i_0 H\left(x-\xi\right)H\left(t-\tau\right)/\rho_s\,, x < \ell(t)$, можно с учетом (15) представить $S_+ ** \Omega_-$ в виде

$$S_+ ** \Omega_- = -\frac{i_0}{\rho_s}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t S_+(t',x')H\left(x-x'-\xi\right)H\left(t-t'-\tau\right)dt'dx' =$$

$$= \frac{2i_0}{\rho_s\sqrt{i\pi}}H\left(x-\xi\right)\sqrt{x-\xi}H\left(T-1\right)\left\{1-\int_T^{\overline{a}/b}\frac{\left(\overline{a}/b-u\right)\sqrt{u-1}\sqrt{u-T}F_2(u)\,du}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2 i)u}H\left(\frac{\overline{a}}{b}-T\right)\right\},$$

$$T = \frac{\overline{a}(t-\tau)}{x-\xi}\,. \tag{20}$$

Подставляя выражения $S_+ ** \Omega_-$ и $S_-(t,x)$ в (19) с учетом (16), после громоздких вычислений получается

$$V_- = -\frac{2i_0\left(x-\xi\right)}{\rho_s C_0 \pi}\operatorname{Re}\left(A\left(I_{11}+I_{12}\right)+I_{21}+I_{22}+I_{23}+I_{24}\right), \tag{21}$$

где

$$I_{11} = \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\varphi_0-1}{\varphi_0+1}\right| - \frac{\left(\ell\left(t_0^{''}\right)-x\right)\varphi_0}{x-\xi}\right)H\left(L_0-1\right) + \frac{1}{2}\left(\ln\left(T-\sqrt{T^2-1}\right)-\sqrt{T^2-1}\right)H\left(1-L_0\right),$$

$$I_{22} = -\int_1^{\bar{a}/b} F_3(h)\int_{L_1}^{\bar{a}/b} F_4(u)\left(\frac{\left(\ell\left(t_1^{''}\right)-x\right)\varphi_1\sqrt{u-L_1}}{u(x-\xi)+\left(\ell\left(t_1^{''}\right)-\xi\right)\left(L_1+\frac{h}{\varphi_1^2}\right)} + \frac{1}{2\sqrt{u+h}}\ln\left|\frac{\varphi_1-\sqrt{\frac{u+h}{u-L_1}}}{\varphi_1+\sqrt{\frac{u+h}{u-L_1}}}\right|\right)H\left(L_1-1\right)H\left(\frac{\bar{a}}{b}-L_1\right)du\,dh,$$

$$I_{12} = \int_{L_0}^{\bar{a}/b} F_4(u)\left(\frac{\sqrt{u-L_0}\left(\ell\left(t_0^{''}\right)-\xi\right)}{(u-T)(x-\xi)\varphi_0} - \frac{1}{2\sqrt{u+1}}\ln\left|\frac{\varphi_0-\sqrt{\frac{u+1}{u-L_0}}}{\varphi_0+\sqrt{\frac{u+1}{u-L_0}}}\right|\right)H\left(L_0-1\right)H\left(\frac{\bar{a}}{b}-L_0\right)du +$$

$$+\int_1^{\bar{a}/b} F_4(u)\left(\frac{\sqrt{u-1}\sqrt{T^2-1}}{u-T} - \frac{1}{2\sqrt{u+1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{T+1}{T-1}}-\sqrt{\frac{u+1}{u-1}}}{\sqrt{\frac{T+1}{T-1}}+\sqrt{\frac{u+1}{u-1}}}\right|\right)H\left(1-L_0\right)du,$$

$$I_{21} = \int_1^{\bar{a}/b} F_3(h)\left\{\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\varphi_1\sqrt{h}-1}{\varphi_1\sqrt{h}+1}\right| + \frac{\varphi_1\sqrt{h}}{1-\varphi_1^2 h}\right)H\left(L_1-1\right) + \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{T+h}{T-1}}-1}{\sqrt{\frac{T+h}{T-1}}+1}\right| - \frac{\sqrt{T-1}\sqrt{T+h}}{h+1}\right)H\left(1-L_1\right)\right\}dh,$$

$$I_{23} = \int_1^{\bar{a}/b} F_3(h)\int_1^{\bar{a}/b} F_4(u)\left(\frac{\sqrt{\left(bu-\bar{a}\right)\left(bT-\bar{a}\right)(T+h)}}{\left(\bar{a}+hb\right)(T-u)} + \frac{1}{2\sqrt{u+h}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{T+h}{T-\bar{a}/b}}-\sqrt{\frac{u+h}{u-\bar{a}/b}}}{\sqrt{\frac{T+h}{T-\bar{a}/b}}+\sqrt{\frac{u+h}{u-\bar{a}/b}}}\right|\right)H\left(1-L_1\right)H\left(T-\frac{\bar{a}}{b}\right)du\,dh,$$

$$I_{24} = -\int_1^{\bar{a}/b} F_3(h)\int_{L_1}^{\bar{a}/b} F_4(u)\left(\frac{\sqrt{(u-1)(T+h)(T-1)}}{(h+1)(T-u)} + \frac{1}{2\sqrt{u+h}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{T+h}{T-1}}-\sqrt{\frac{u+h}{u-1}}}{\sqrt{\frac{T+h}{T-1}}+\sqrt{\frac{u+h}{u-1}}}\right|\right)H\left(1-L_1\right)du\,dh,$$

$$F_3(h)=\int_h^{\bar{a}/b}\frac{d}{du}\left(\frac{\left(\bar{a}/b-u\right)\sqrt{u-1}F_2(u)}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2 i)}\right)\frac{du}{\sqrt{u-h}},$$

$$F_4(u)=\frac{\left(\bar{a}/b-u\right)\sqrt{u-1}\,(u-T)F_2(u)}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2 i)u},$$

$$l\left(t_n^{"}\right)-x-\frac{a\left(t-t_n^{"}\right)}{h_n}=0,\varphi_n=\sqrt{\frac{l\left(t_n^{"}\right)-\xi}{l\left(t_n^{"}\right)-x}},L_n=\frac{a\left(t_n^{"}-\tau\right)}{l\left(t_n^{"}\right)-\xi},h_0=1,h_1=h,$$

$$A=1-\int_1^{\bar{a}/b}\frac{\left(\bar{a}/b-u\right)F_2(u)\,du}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2 i)}.$$

Как видно из последней формулы, при $x\to\ell(t)$ особенностей не имеется, что в других задачах статики и динамики известно из решений работ [1, 2, 5].

Для неподвижной трещины указанная задача решена в [2], получено вертикальное перемещение среды на трещине $V(t,x)$, записано выражение полуширины трещины $b(t,x)=b_0+V(t,x)$ и численно решено уравнение $b_0+V(t,x)=0,$ определяющее процесс x,t залечивания для макротрещин с начальной полушириной $b_0=0.1$ см, $b_0=1$ см и микротрещин с $b_0=10^{-5}$ см. По построенным графикам $x=x(t)$ для различных постоянных процессов в биологии, сейсмологии, геотермальных и технологических трещин удалось выяснить их прямолинейный характер для макротрещин и наличие существенно криволинейной части для микротрещин, причем наклон dx/dt для макротрещин намного больше, чем для микротрещин. Используя метод нелинейной волновой динамики для описания статистики [6-8] указанного процесса залечивания [2], согласно которому по средней кривой процесса $x=x(t)$, можно определять характер его детерминированности согласно уравнению [2, 9]

$$dx/dt=a_0+\gamma P/2\,, \tag{22}$$

где a_0 есть относительно малый наклон кривой $x=x(t)$ на предварительной линейной латентной хаотичной [2, 9] части процесса, а полное уравнение (22) характеризует нелинейный почти детерминированный процесс в окончательной стадии его развития. Причем естественно по самой постановке задачи и по прямолинейным графикам $x(t)$ считать для макротрещин вероятность $P=1$, тогда находится постоянный нелинейный коэффициент γ для всех процессов [2], а затем определяется по (22) вероятность $P \ll 1$ для микротрещин, т.е. процесс для них является хаотичным. Те же исследования применяются нами для движущихся по произвольному закону трещинам, для которых $V(t,x)$ дается (21). Взяв в качестве $l(t)$ полученную нами аналитическую формулу для практической кривой, данной в виде графика распространяющейся макроскопической трещины в [10], удается провести аналогичный метод получения кривых залечивания движущихся трещин флюидом [2] и их статистики.

Следует отметить, что обратный процесс формирования магистральных макротрещин после резкого перехода от хаотичных микро- и мезотрещин к детерминированным макротрещинам является актуальной задачей механики разрушения [10-12], причем указанные переходы являются типичными триггерными фазовыми переходами, аналогичными генерации лазерного излучения, сверхпроводимости, большинству биологических процессов [7, 13]. При этом указанные переходы можно изучать методами нелинейной волновой динамики [2].

Горисский государственный университет

А. Н. Мартиросян, А. С. Динунц, А. В. Давтян
Нестационарная задача о залечивании трещины, движущейся с переменной скоростью

Методом сверток решается задача о наращивании слоя примесей, содержащихся в жидкости (флюиде), поступающей в полубесконечный тонкий разлом в виде полуполосы (трещины), край которой движется с произвольной скоростью в термоупругой плоскости.

Ա. Ն. Մարտիրոսյան, Ա. Ս. Դինունց, Ա. Վ. Դավթյան
Փոփոխական արագությամբ շարժվող ճաքի բուժման ոչ ստացիոնար խնդիրը

Փաթույթների մեթոդով լուծված է ջերմաառաձգական հարթության մեջ կիսաանվերջ բարակ շերտի (ճաքի) բուժման խնդիրը ներս թափանցող հեղուկ-խառնուրդների միջոցով, երբ ճաքի եզրը շարժվում է կամայական վերջավոր արագությամբ:

A. N. Martirosyan, A. S. Dinunts, A.V. Davtyan

The Unsteady Problems on Healing of Crack Moving with Arbitrary Velocity

By convolution method the problem of healing of moving with the arbitrary velocity semi-infinite thin fracture (crack), by current of mixture of fluid-cristallines in it, within infinite thermo elastic media is solved.

Литература

1. *Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В.*- ДНАН РА. 2010. Т.110. N 2. С.151-162.
2. *Bagdoev A.G., Martirosyan G.A., Martirosyan A.N., Dinunts A.S., Davtyan A.V.* In: VII Int. Conf. "The Problems of Dynamics of Interaction of Deformable Media". Goris. Armenia. 2011. P. 8.
3. *Мартиросян А.Н.* Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред. "Зангак-97". 2007. 244 с.
4. *Винер Н., Пэли П.* Преобразование Фурье в комплексной области. М.Наука.1964. 268 с.
5. *Мхитарян С.М., Шекян А.Л., Шекян Л.А.* В кн.: Материалы VI междунар конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис – Степанакерт. 2008. С. 345-349.
6. *Айала Ф., Кайгер Дж.* Современная генетика. Т.3. М. Мир.1998. 331с.
7. *Эбелинг В.* Образование структур при необратимых процессах. М.:Мир. 1979. 278 с.
8. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. М. Наука. 1976. 494 с.
9. *Мартиросян А.Н., Багдоев А.Г.* - ДНАН РА, 2008. Т. 108. N 4. С. 341-349.
10. *Туманов Н.В.* В кн.: Материалы междунар. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды". Т. 2. Дилижан, Армения. 2010. С.194-198.
11. *Bratov V.A., Morozov N.F., Petrov Y.V.* In: Int. Conf. "Topical Problems of Continuum Mechanics". V. 2. Dilijan, Armenia. 2010. P. 256-261.
12. *Кукуджанов В.Н.* Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. Изд-во Московского физ.-тех. ин-та (Гос.университет). 2008. 214 с.
13. *Хакен Г.* Синергетика. М. Мир. 1980. 404 с.