ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 112 2012 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Академик В. С. Захарян, Р. В. Даллакян

О граничных значениях функций классов A_ω

(Представлено 8/VI 2011)

Ключевые слова: *ядра типа Коши, Шварца и Пуассона, гармонические функции, функции с конечным полным изменением, мера, B-измеримые множества, ω-емкость множества*

Применение М. М. Джрбашяном нового подхода с интегродифференцированием привело к законченной форме теории факторизации классов $N\{\omega\}$ неванлинновского типа, которые зависят от функции параметра $\omega(x)$, заданной в $[0,1)$ [1]. Граничные свойства этих классов даны в совместной книге М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна [2].

Через Ω обозначим класс функций $\omega(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\omega(x)$ положительна и непрерывна на $[0,1)$,

2) $\omega(0)=1,\ \int_0^1 \omega(x)dx < +\infty$.

Далее условимся функцию $P(\tau)$ включать в класс P_ω, если

$$P(0)=1,\ P(\tau)=\tau\int_\tau^1 \frac{\omega(x)}{x^2}dx, \qquad \tau\in(0,1],$$

где $\omega(x)\in\Omega$. Функция $P(\tau)$ неотрицательна и непрерывна на $[0,1]$, причем

$$P(+0)=P(0)=1, \qquad P(1)=0.$$

Определим далее последовательность Δ_k следующим образом:

$$\Delta_0 = 1, \ \Delta_k = k \cdot \int_0^1 \omega(x) \cdot x^{k-1} dx, \quad k = 1,2,\cdots.$$

Для $\omega(x) \in \Omega$ рассмотрим следующий степенной ряд:

$$C(z,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{\Delta_k}, \quad |z| < 1. \tag{1}$$

Функция $C(z,\omega)$ в равной мере, как и функция

$$S(z,\omega) = 2C(z,\omega) - C(0,\omega) = 1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{\Delta_k}, \quad |z| < 1, \tag{2}$$

аналитична в круге $U = \{z; |z| < 1\}$ и в точке $z = 1$ имеет особенность, причем

$$\lim_{r \to 1} C(r,\omega) = \lim_{r \to 1} S(r,\omega) = +\infty.$$

Теперь пусть $\omega(x) \in \Omega$ и $P(\tau) \in P_\omega$. Введем в рассмотрение следуюший оператор:

$$L^{(\omega)}\{\Phi(x)\} = -\frac{d}{dx}\left\{x \int_0^1 \Phi(x\tau) dP(\tau)\right\}, x \in (0,1), \tag{3}$$

предполагая, что в надлежащих классах допустимых функций $\Phi(x)$, определенных на $(0,1)$, левая часть тождества (3) существует хотя бы почти всюду на $(0,1)$.

Можно убедиться (см.[1-4]), что применение оператора $L^{(\omega)}$ к какой-либо функции $f(z)$, голоморфной в окрестности начала координат, означает умножение коэффициентов степенного ряда $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ на величину Δ_k, т.е.

$$L^{(\omega)}[f(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Delta_k z_k.$$

Применение же обратного оператора суть деление коэффициентов степенного ряда на величину Δ_k. В частности, оператор $L^{(\omega)}$ переводит ядра $C(z,\omega)$ и $S(z,\omega)$ в обычные ядра Коши и Шварца.

В общем случае оператор $L^{(\omega)}$ является взаимооднозначным соответствием в классе голоморфных в U функций.

Введем в рассмотрение также следующую гармоническую в U функцию:

$$P(\gamma,r,\omega) = \operatorname{Re} S(re^{i\gamma},\omega) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{\Delta_k} \cos k\gamma. \tag{4}$$

Заметим, что в частном случае $\omega(x) \equiv 1$ функция $P(\gamma,r,\omega)$ тождественна с ядром Пуассона.

Обозначим через U_ω множество гармонических в U функций $u(z)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{\pi} \left| u_\omega(re^{i\varphi}) \right| d\varphi < +\infty,$$

где $\omega(x)\in\Omega$ и $u_\omega\left(re^{i\varphi}\right)=L^{(\omega)}\left[u\left(re^{i\varphi}\right)\right]$.

В $[2]$ (см. с. 37) доказано, что класс U_ω совпадает с множеством гармонических функций $U(z)$, представимых в виде интеграла

$$U\left(re^{i\varphi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\varphi-\gamma,r,\omega)\,d\psi(\gamma);\qquad 0\le r<1,\quad 0\le\gamma\le 2\pi, \tag{5}$$

где $\psi(\gamma)$ произвольная вещественная функция с конечным изменением на $[0,2\pi]$.

Определим класс $A_\omega(\omega\in\Omega)$ как множество голоморфных в U функций, для которых $\sup\limits_{0\le r\le 1} m_\omega(r,f)<+\infty$, где

$$m_\omega(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(re^{i\Theta}\right)\right|\right\}d\Theta. \tag{6}$$

Под Ω_0 будем понимать множество функций $\omega(x)$, определенных на $[0,1)$ и подчиненных следующим условиям:

1) $\omega(x)$ положительна, непрерывна и не убывает на $[0,1)$, причем в точке $x=0$ удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$|\omega(x)-1|\le k(\delta)\cdot x,\ 0\le x<\delta<1;$$

2) $\omega(0)=1$, $\int_0^1\omega(x)dx\equiv\|\omega_1\|_1<+\infty$.

Заметим, что когда $\omega(x)\in\Omega_0$, то $A_\omega\subset A_0$, где A_0 – известный класс Островского – Неванлинны ([6]).

Условимся говорить, что B-измеримое множество $E\subset[0,2\pi]$имеет положительную ω-емкость $C_\omega(E)$, если существует мера $\mu\prec E$, для которой функция

$$U_\omega\left(re^{i\varphi}\right)=\int_0^{2\pi}\left|C_\omega\left(re^{i(\varphi-\gamma)},\omega\right)\right|d\mu(\gamma) \tag{7}$$

остается равномерно ограниченной по $\varphi\in[0,2\pi]$ при $r\to 1-0$. Здесь $\mu\prec E$ означает, что мера μ сосредоточена на множестве E, т. е. $\int_E d\mu=\int_0^{2\pi}d\mu=\mu(E)=1$. В случае отсутствия такой меры, т. е. в случае, когда для любой меры $\mu\prec E$ имеем

$$\lim_{r\to 1-0}\max_{0\le\varphi\le 2\pi}U\left(re^{i\varphi}\right)=+\infty,$$

будем считать, что ω-емкость множества E равна нулю. При этом соответственно будем писать $C_\omega(E)>0$ или $C_\omega(E)=0$. Нетрудно убедиться, что при $\omega(x)=(1-x)^\alpha$, $-1<\alpha<0$ определение $C_\omega(E)$ совпадает с определением α-емкости $[2]$.

Теорема 1. *Пусть* $f(z)\in A_\omega$, $\omega(x)\in\Omega_0$ *и не имеет нулей. Тогда*

$$\lim_{z\to e^{i\Theta}}\frac{\ln|f(z)|}{C(|z|,\omega)}=0 \qquad (8)$$

для всех $\Theta\in[0,2\pi]$, *кроме, быть может, некоторого исключительного множества,* ω*-емкость которого равна нулю.*

Доказательство. Если для некоторой точки $e^{i\Theta}$ не имеет места равенство (8)(см. $[5]$), то существует последовательность $\{z_n\}\subset U$ такая, что $z_n\to e^{i\Theta}$, когда $n\to+\infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|f(z_n)|}{C(|z_n|,\omega)}=d\neq 0\,. \qquad (9)$$

Известно, что (см. $[5]$) если гармоническая функция $\ln|f(z)|\in U_\omega$ и имеет место равенство (9), то $\ln|f(z)|$ имеет следующее представление:

$$\ln|f(z)|=u(z)+s\cdot\operatorname{Re}S\left(re^{i(\Theta-\varphi)},\omega\right);\quad z=re^{i\varphi}, \qquad (10)$$

где $u(z)$ – гармоническая функция из класса U_ω такая, что

$$\lim_{z\to e^{i\Theta}}\frac{u(z)}{C(|z|,\omega)}=0\,, \qquad (11)$$

а $2\pi s$ – скачок функции $\psi(\gamma)$ в точке Θ в представлении (5) гармонической функции $\ln|f(z)|$. Из (10), пользуясь (9) и (11), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Re}S\left(r_ne^{i(\Theta-\varphi_n)},\omega\right)}{S(r_n,\omega)}=d\neq 0,\quad z_n=r_ne^{i\varphi_n},\quad n=1,2,\cdots \qquad (12)$$

Обозначим через F_β луч, образующий угол β с радиусом, проходящим через точку $e^{i\Theta}$. В $[5]$ (теорема 2) доказано, что если последовательность $\{z_n\}$ находится на луче F_β, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Re}S\left(re^{i(\Theta-\varphi_n)},\omega\right)}{S(r_n,\omega)}=2\cos^2\beta\,.$$

Так как здесь можно взять и $\beta=0$, то с самого начала последовательность $\{z_n\}$ можно взять так, чтобы все его члены находились на радиусе, соединяющем точки 0 и $e^{i\Theta}$. Таким образом, если (9) имеет место, то можно предполагать, что все точки z_n, $n=1,2,\cdots$, находятся на вышеупомянутом радиусе.

Но известно (см. [2], с.118), что радиальные предельные значения любой функции из класса $A_\omega, \omega \in \Omega_0$ существуют и конечны для всех $\Theta \in [0,2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0,2\pi]$, для которого $C_\omega(E) = 0$, причем эти предельные значения могут равняться нулю только на множестве, ω-емкость которого равна нулю.

Так как $f(z)$ не имеет нулей, то в тех точках $e^{i\Theta}$, где существует и конечен $\lim\limits_{z=re^{ik\Theta} \to e^{iO}} f(z)$, справедливо следующее равенство:

$$\lim_{z=re^{ik\Theta} \to e^{iO}} \frac{\ln|f(z)|}{C(|z|,\omega)} = 0,$$

причем ω-емкость множества, где нарушается это равенство, очевидно равна нулю. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $f(z) \in A_\omega$, $\omega(x) \in \Omega_0$ и не имеет нулей. Если для некоторой точки $e^{i\Theta}$*

$$\varlimsup_{z \to e^{i\Theta}} \frac{\ln|f(z)|}{C(|z|,\omega)} = d \neq 0,$$

то угловые граничные значения (см. [6]) функции $\dfrac{\ln|f(z_n)|}{C(|z|,\omega)}$, когда $z \to e^{i\Theta}$, не существуют, причем ω-емкость множества, где эти угловые граничные значения не существуют, равна нулю.

Доказательство. Если условия теоремы имеют место, то из теоремы 2 работы [5] имеем

$$\lim_{z \to e^{i\Theta},\, z \in F_\beta} \frac{|\ln|f(z)||}{C(|z|,\omega)} = 2\cos^2 \beta,$$

где F_β – луч, образующий угол β с радиусом, проходящим через точку $e^{i\Theta}$. Отсюда и следует спроведливость утверждения теоремы.

Следующее утверждение является следствием теоремы 2 работы [5].

Теорема 3. *Пусть $f(z) \in A_\omega$, $\omega(x) \in \Omega_0$ и не имеет нулей. Тогда для любой точки $e^{i\Theta}$, если z стремится к $e^{i\Theta}$ по касательному к окружности пути,*

$$\lim_{z \to e^{i\Theta}} \frac{\ln|f(z_n)|}{C(|z|,\omega)} = 0.$$

Государственный инженерный университет Армении

Академик В. С. Захарян, Р. В. Даллакян
О граничных значениях функций классов A_ω

Доказан ряд теорем о граничных значениях функций классов A_ω.

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Ռ. Վ. Դալլաքյան
A_ω դասի ֆունկցիաների եզրային արժեքների մասին

Ապացուցված են մի շարք թեորեմներ A_ω դասի ֆունկցիաների եզրային արժեքների մասին:

Academician V. S. Zakaryan, R.V. Dallakyan
About the Bordering Meanings of the A_ω Class Functions

Several theorems about the bordering meanings of the A_ω class functions have been proved.

Литература

1. *Джрбашян М. М* . - Мат. сб. 1969. Т. 79 (121). С. 517-615.
2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. М. Изд. фирма “Физ.-мат. лит.” ВО “Наука”. 1993.
3. *Джрбашян М. М ., Захарян В. С.* – Изв. АН СССР. Серия матем. 1970. Т. 34. С. 1262-1339.
4. *Джрбашян А. М., Захарян В.С.* – Изв. НАН Армении. Математика. 2009. Т. 44. № 6. С. 5-62.
5. *Захарян В.С., Даллакян Р. В.* - Математика в высшей школе. 2010. Т. 6. С. 5-16.
6. *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. М. Гос. изд-во техн.-теоретич. лит. М. 1950.