ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 112 2012 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Академик С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян

Поперечные колебания идеально проводящей плоской прямоугольной мембраны в продольном магнитном поле

(Представлено 9/XI 2011)

Ключевые слова: *мембрана, идеальный проводник, колебания, магнитное поле*

1. Рассматривается весьма тонкая прямоугольная мембрана, занимающая в декартовой системе координат (x, y, z) область $0 \le x \le a$. Предполагается, что материал мембраны идеально проводящий. Пусть мембрана находится в постоянном магнитном поле, параллельном срединной поверхности мембраны. Известно [1,2], что под действием продольного магнитного поля в мембране появляются тангенциальные растягивающие усилия. Полагая $h \ll a$, $h \ll b$, считаем пренебрежительно малой жесткость изгиба $D = Eh^3 / 12\left(1-\nu^2\right) \approx 0$.

На основе гипотезы недеформируемых нормалей и некоторых упрощающих предположений относительно условий на лицевых поверхностях мембраны $(z = \pm h)$ получим следующее уравнение движения [1,2]:

$$\mathrm{V}_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\mathrm{V}_1\mathrm{V}_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \mathrm{V}_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (1.1)$$

где

$$\mathrm{V}_k^2=\frac{\mu H_{ok}^2}{4\pi\rho},\quad k=1,2, \tag{1.2}$$

H_{ok} – тангенциальные компоненты вектора напряженности магнитного поля; μ – коэффициент магнитной проницаемости; ρ – плотность материала мембраны; $w=w(x,y)$ – нормальное перемещение; t – время.

Пусть все края мембраны закреплены, т.е. имеем следующие граничные условия:

$$w=0 \text{ при } y=0,b, \tag{1.3}$$

$$w=0 \text{ при } x=0,a. \tag{1.4}$$

2. Задачу поперечных колебаний мембраны решаем методом Галеркина [3]. Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.3), представим в виде

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\omega t}f_n(x)\sin\lambda_n y,\quad \lambda_n=n\pi/b. \tag{2.1}$$

Представляя (2.1) в уравнении (1.1), умножая все это на $\sin\lambda_m y$ и интегрируя по y в пределах от 0 до b, получим следующую бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функции $f_n(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[f_n''+\lambda_n^2\theta^2\left(\eta_n^2-1\right)\right]C_{mn}+2\lambda_n\theta f_n' d_{mn}\right\}=0,\quad m=1,2... \tag{2.2}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\eta_n^2=\frac{\omega^2}{V_2^2\lambda_n^2},\quad \theta=\frac{V_2}{V_1}, \tag{2.3}$$

$$C_{mn}=\int_0^b\sin\lambda_m y\sin\lambda_n y\,dy=\begin{cases}0,5b & m=n,\\ 0 & m\neq n,\end{cases}$$

$$d_{mn}=\int_0^b\sin\lambda_m y\cos\lambda_n y\,dy=\begin{cases}0 & m=n\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1-(-1)^{m-n}}{\lambda_m-\lambda_n}+\frac{1-(-1)^{m+n}}{\lambda_m+\lambda_n}\right).\end{cases} \tag{2.4}$$

Решение системы бесконечных уравнений (2.2) обычно заменяется решением усечённой системы.

Для наглядности приведём первые три приближения.

В первом приближении решается одно уравнение:

$$f_1'' + \theta^2\lambda_n^2\left(\eta_1^2 - 1\right)f_1 = 0\,. \tag{2.5}$$

Второе приближение:

$$\begin{aligned} &f_1'' + \theta^2\lambda_1^2\left(\eta_1^2 - 1\right)f_1 + 4\theta b^{-1}\lambda_2 d_{12} f_2^1 = 0,\\ &f_2'' + \theta^2\lambda_2^2\left(\eta_2^2 - 1\right)f_2 + 4\theta b^{-1}\lambda_1 d_{21} f_1^1 = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Третье приближение:

$$\begin{aligned} &f_1'' + \theta^2\lambda_1^2\left(\eta_1^2 - 1\right)f_1 + 4\theta b^{-1}\left(\lambda_2 d_{12} f_2' + \lambda_3 d_{13} f_3'\right) = 0,\\ &f_2'' + \theta^2\lambda_2^2\left(\eta_2^2 - 1\right)f_2 + 4\theta b^{-1}\left(\lambda_1 d_{21} f_1' + \lambda_3 d_{23} f_3'\right) = 0,\\ &f_3'' + \theta^2\lambda_3^2\left(\eta_3^2 - 1\right)f_3 + 4\theta b^{-1}\left(\lambda_1 d_{31} f_1' + \lambda_2 d_{32} f_2'\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Пусть две другие кромки мембраны также закреплены, т.е. имеем граничные условия (1.4), откуда следует

$$f_m\left(0\right) = f_m\left(a\right) = 0\,. \tag{2.8}$$

Решая уравнение (2.5) и удовлетворяя граничным условиям (2.8), получим

$$\sin\theta\lambda_1\sqrt{\eta_1^2 - 1}\,a = 0\,. \tag{2.9}$$

Отсюда, с учётом (2.3), в первом приближении определятся частоты колебаний

$$\omega_{1k}^2 = \lambda_1^2 V_2^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 V_1^2, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.10}$$

В (2.10) минимальная частота получается при $k = 1$.

Для второго приближения решение системы (2.6) представляется в виде

$$f_1 = Ae^{px}, \quad f_2 = Be^{px}\,. \tag{2.11}$$

Подстановка (2.11) в (2.6) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A, B:

$$\begin{aligned} &\left(p^2+\theta^2\nu_1\right)A_1+4\theta b^{-1}\lambda_2 d_{12} pB=0, \\ &4\theta b^{-1}\lambda_1 d_{21} pA+\left(p^2+\theta^2\nu_2\right)B=0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где

$$\nu_1=\lambda_1^2\left(\eta_1^2-1\right), \quad \nu_2=\lambda_2^2\left(\eta_2^2-1\right). \tag{2.13}$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.12) дает биквадратное характеристическое уравнение относительно p. Нетрудно показать, что указанное уравнение имеет четыре мнимых корня

$$\pm i\theta p_1, \ \pm i\theta p_2, \tag{2.14}$$

где

$$p_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\nu_1+\nu_2-\gamma\pm\sqrt{\left(\nu_1+\nu_2-\gamma\right)^2-4\nu_1\nu_2}\right]^{1/2}, \tag{2.15}$$

$$\gamma=\frac{16\lambda_1\lambda_2 d_{12} d_{21}}{b^2}=-\frac{64\lambda_1^2\lambda_2^2}{b^2\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)^2}. \tag{2.16}$$

Отсюда следует, что общее решение системы (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} f_1(x)&=A_1\cos\theta p_1 x+A_2\cos\theta p_1 x+A_3\cos\theta p_2 x+A_4\cos\theta p_2 x, \\ f_2(x)&=B_1\cos\theta p_1 x+B_2\sin\theta p_1 x+A_3\cos\theta p_2 x+A_4\sin\theta p_2 x, \end{aligned} \tag{2.17}$$

при этом произвольные постоянные A_k и B_k согласно системе (2.12) связаны между собой следующим образом:

$$\begin{aligned} &B_1=-i\alpha_1 A_1, \quad B_2=i\alpha_1 A_2, \quad B_3=-i\alpha_2 A_3, \quad B_4=i\alpha_2 A_4, \\ &\alpha_1=b\frac{p_1^2-\nu_1}{4\lambda_2 d_{12} p_1}, \quad \alpha_2=b\frac{p_2^2-\nu_1}{4\lambda_2 d_{12} p_2}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Таким образом, остаются четыре произвольные A_1, A_2, A_3, A_4. Подстановка (2.17) в граничные условия (2.8) приводит к четырем уравнениям (однородным) относительно A_k. Равенство нулю детерминанта указанной системы уравнений приводит к следующему уравнению относительно частот колебаний:

$$(\alpha_2 - \alpha_1)\sin\theta p_2 a \sin\theta p_1 a = 0. \tag{2.19}$$

Нетрудно проверить, что $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$. Тогда либо $\sin\theta p_2 a = 0$, либо $\sin\theta p_1 a = 0$. Решение этих уравнений приводит к решению следующего уравнения относительно частот колебаний:

$$\nu_1\nu_2 - \left(\frac{k\pi}{\theta a}\right)^2 (\nu_1 + \nu_2 - \gamma) + \left(\frac{k\pi}{\theta a}\right)^4 = 0, \quad k = 1, 2, ... \tag{2.20}$$

Институт механики НАН РА

Академик С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян

Поперечные колебания идеально проводящей плоской прямоугольной мембраны в продольном магнитном поле

Задача приводится к решению волнового уравнения при наличии члена со смешанными производными. В случае закрепленных кромок мембраны применяется метод Галеркина. Исследованы частоты колебаний в зависимости от напряженности магнитного поля.

Ակադեմիկոս Ս. Ա. Համբարձումյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան

Երկայնական մագնիսական դաշտում հարթ ուղղանկյուն իդեալական հաղորդիչ մեմբրանի լայնական տատանումները

Խնդիրը բերվում է խառը ածանցյալ ունեցող անդամով ալիքային հավասարման լուծման: Եզրերով ամրակցված մեմբրանի դեպքում կիրառվում է Գալերկինի մեթոդը: Հետազոտվում են տատանումների հաճախականությունները՝ կախված մագնիսական դաշտի լարվածությունից:

Academican S. A. Ambartsumian, M. V. Belubekyan

Transversal Vibrations of the Perfect Conductive Rectangular Plane Membrane in the Longitudinal Magnetic Field

The problem is reduced to the solution of wave equation with the member of the mixed derivatives. The Gallerkin's method is applied in the case of clumped edges. The vibration frequences are investigated in dependense of the magnetic field intensivity.

Литература

1. *Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B., Marzocca P., Cormier C.* - Journal of Applied Mechanics. 2007. V.74. P. 1071-1077.
2. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука. 1977. 272 с.
3. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М. Физматгиз. 1959. 439 с.