ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 112 2012 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Академик В. С. Захарян, Р. В. Даллакян

О росте функций классов A_α^p

(Представлено 28/X 2011)

Ключевые слова: *классы* A_α^p, D_α^p – *классы аналитических функций с конечным интегралом типа Дирихле, классы* H_p.

Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $Hol(\mathbb{D})$ – множество голоморфных в $\mathbb{D}$ функций. Скажем, что функция $f(z)$ из $Hol(\mathbb{D})$ принадлежит классу A_α^p, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, если

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r)^\alpha \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p r dr d\theta < +\infty, \ z = re^{i\theta}.$$

Исследованием поведения функций этих классов занимались и занимаются многие известные математики, в том числе и математики Армении. М. М. Джрбашян обозначал эти классы через $H_p(\alpha)$ [1]. Некоторые авторы называют их классами Бергмана.

И в [1], и в работах других авторов (см., например, [2]) доказано, что если $f(z) \in A_\alpha^p$, то

$$|f(z)| \le \frac{M}{(1-|z|)^{\frac{\alpha+2}{p}}}, \ z \in \mathbb{D}, \tag{1}$$

где M – некоторая константа.

Определим классы A^p следующим образом: $A^p \equiv A_0^p$.

Скажем, что функция $f(z)$ из $Hol(\mathbb{D})$ принадлежит классу $D_\alpha^p, 0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, если

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r)^\alpha \left| f'\left(re^{i\theta}\right)\right|^p r dr d\theta < +\infty,\ z = re^{i\theta}.$$

При $\alpha = 0$ класс функций D_0^2 совпадает с обычным классом аналитических в $\mathbb{D}$ функций с конечным интегралом Дирихле, а при $\alpha + 1 \le p$ классы D_α^p называются классами с конечным интегралом типа Дирихле.

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, z \in \mathbb{D}$. Обозначим

$$\overline{M}(r, f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n, z = re^{i\theta}.$$

В. Коулингом в [3] доказано, что если $f(z) \in D_0^2$, то

$$\lim_{r \to 1-} \left(\log \frac{1}{1-r} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \overline{M}(r, f) = 0,\ z = re^{i\theta}. \tag{2}$$

А В. С. Захаряном в [4] доказано, что если $f(z) \in D_\alpha^2$, $\alpha > 0$, то

$$\lim_{r \to 1-} (1-r)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \overline{M}(r, f) = 0,\ z = re^{i\theta}. \tag{3}$$

Результаты (2) и (3) В. Коулинга и В. С. Захаряна, а также “схожесть” в некотором смысле классов A_α^p и D_α^p подсказывают, что результат (1) можно усилить. В этой заметке усиление удалось отчасти.

Теорема 1. *Пусть* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A^2, z = re^{i\theta}$. *Тогда если существует*

$$\lim_{r\to 1-}(1-r)\left(\ln\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \overline{M}(r,f), \qquad (4)$$

то он равен нулю.

Доказательство. По одной теореме М. М. Джрбашяна (см. [1], теорема v) $f(z)$ имеет следующий вид:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h\left(e^{i\theta}\right)d\theta}{\left(1-e^{-i\theta}z\right)^{\frac{3}{2}}},\ |z|<1,$$

где

$$h(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^1(1-\rho)^{-\frac{1}{2}}f(\rho z)d\rho,\ |z|<1,$$

принадлежит классу H_2 Рисса.

Рассмотрим следующую функцию:

$$g(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}h\left(e^{i\theta}\right)d\theta}{\left(1-e^{-i\theta}z\right)^{\frac{1}{2}}},\ |z|<1.$$

Так как $g'(z)=f(z)$, то $g(z)\in D_0^2$.Но тогда, если $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ ряд Тейлора функции $g(z)$, то по теореме В. Коулинга

$$\lim_{r\to 1-}\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot \overline{M}(r,g)=0, z=re^{i\theta}. \qquad (5)$$

Ясно, что когда $M(r,f)$ ограничен, то предел (4) равен нулю. Если же $M(r,g)\underset{r\to 1-}{\to}+\infty$, то пользуясь вышеупомянутой теоремой М. М. Джрбашяна и биномиальным представлением функции $\left(1-e^{-i\theta}z\right)^{-\frac{1}{2}}$ не трудно увидеть, что

$$\lim_{r\to 1-}\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot \overline{M}(r,g)=\lim_{r\to 1-}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}|b_n|r^n}{\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$= \lim_{r\to 1-} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n|b_n| r^{n-1}}{\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-\frac{1}{2}}(1-r)^{-1}} = 2\lim_{r\to 1-}(1-r)\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n .$$

Но по условию теоремы последний предел существует, значит согласно (5) он равен нулю.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A^p$, $0<p<\infty$ *и пусть* $z=re^{i\theta}$. *Тогда, если существует предел*

$$\lim_{r\to 1-}(1-r)\left(\ln\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \overline{M}\left(r, f^{\frac{p}{2}}\right), \qquad (6)$$

то

$$\lim_{r\to 1-}(1-r)^{\frac{2}{p}}\left(\ln\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \qquad (7)$$

для всех $\theta\in(0,2\pi]$.

Доказательство. При $p=2$ доказательство легко следует из теоремы 1. Пусть $p\neq 2$, тогда функция $(f(z))^{\frac{p}{2}}$ принадлежит классу A^2, и следовательно, по теореме 1, если существует предел (6), то

$$\lim_{r\to 1-}(1-r)\left(\ln\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\frac{p}{2}} = 0$$

для всех $\theta\in(0,2\pi]$. Отсюда и следует (7).

Теорема 3. *Пусть* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A_{\alpha}^2$, $\alpha>0$, *и пусть* $z=re^{i\theta}$. *Тогда, если существует*

$$\lim_{r\to 1-}(1-r)^{\frac{\alpha+2}{2}} \cdot \overline{M}(r,f), \qquad (8)$$

то он равен нулю.

Доказательство. По вышеуказанной теореме М. М. Джрбашяна (см. [1], теорема v) $f(z)$ имеет следующий вид:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h\left(e^{i\theta}\right)d\theta}{\left(1-e^{-i\theta}z\right)^{\frac{3+\alpha}{2}}},\ \ |z|<1,$$

где

$$h(z)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1(1-\rho)^{-\frac{\alpha-1}{2}}f(\rho z)\,d\rho,\ \ |z|<1,$$

принадлежит классу H_2. Рассмотрим функцию

$$g(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}h\left(e^{i\theta}\right)d\theta}{\left(1-e^{-i\theta}z\right)^{\frac{1+\alpha}{2}}}.$$

Так как $g'(z)=f(z)$, то $g(z)\in D_0^2$.Тогда по теореме одного из авторов ([4], теорема 1) для $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ имеем

$$\lim_{r\to 1-}(1-r)^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\overline{M}(r,g)=0\,. \tag{9}$$

Когда $\overline{M}(r,f)$ ограничен, то очевидно предел (8) равен нулю. Пусть $\overline{M}(r,f)\underset{r\to 1-}{\to}+\infty$, тогда, пользуясь вышеупомянутой теоремой М. М. Джрбашяна и биномиальным представлением функции $\left(1-e^{-i\theta}z\right)^{-\frac{1+\alpha}{2}}$, нетрудно увидеть, что

$$\lim_{r\to 1-}\frac{\overline{M}(r,g)}{(1-r)^{-\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2}{\alpha}\lim_{r\to 1-}(1-r)^{\frac{\alpha+2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}n|b_n|r^{n-1}=\frac{2}{\alpha}\lim_{r\to 1-}(1-r)^{\frac{\alpha+2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n\,.$$

Но по условию теоремы последний предел существует. Это означает, что из (9) будет следовать, что он равен нулю.

Теорема 4. *Пусть* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A_\alpha^p$, $0<p<\infty$, $\alpha>0$, *и* $z=re^{i\theta}$. *Тогда, если существует*

$$\lim_{r\to 1-}(1-r)\overline{M}\left(r, f^{\frac{p}{2}}\right), \tag{10}$$

то

$$\lim_{r\to 1-}(1-r)^{\frac{\alpha+2}{p}}\cdot\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|=0 \tag{11}$$

для всех $\theta\in(0,2\pi]$.

Доказательство. В случае $p=2$ утверждение теоремы следует из того, что $\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\le\overline{M}(r,f)$ для всех $\theta\in(0,2\pi]$. Для остальных значений p заметим, что $(f(z))^{\frac{p}{2}}\in A_\alpha^2$. Это означает, что если существует предел (10), то

$$\lim_{r\to 1-}(1-r)^{\frac{\alpha+2}{2}}\cdot\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\frac{p}{2}}=0,$$

для всех $\theta\in(0,2\pi]$. Отсюда и следует (11).

Государственный инженерный университет Армении

Академик В. С. Захарян, Р. В. Даллакян

О росте функций классов A_α^p

Получены результаты о росте функций классов A_α^p при $\alpha\ge 0$.

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Ռ. Վ. Դալլաքյան

A_α^p դասի ֆունկցիաների աճի մասին

Ստացվել են A_α^p դասի ֆունկցիաների աճի մասին արդյունքներ, երբ $\alpha\ge 0$:

Academician V. S. Zakarian, R. V. Dallakyan

About Groth of A_α^p Classes Functions

The results about the growth of A_α^p class functions, when $\alpha \geq 0$ are obtained.

Литература

1. *Джрбашян М. М.*- Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН Арм. ССР. 1948. Вып. 2. С.3-55.
2. *Hedenmalm H., Korenblum B. Zhu.* - Graduate Texts in Mathematics. 2000. Vol. 199. Springer. New York, Berlin, ect.
3. *Gowling V.*- Amer. Math. Monthly. 1959. V. 66. P. 119-120
4. *Захарян В. С.*- Д АН Арм, ССР. 1984. Т. 79. 54-57.