ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

111 2011 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Р. В. Даллакян

Полная характеристика лежащих в углах Штольца нулей одного класса аналитических в круге функций

(Представлено академиком В.С. Захаряном 9/II 2011)

Ключевые слова: *порядок функции λ, классы X_λ^∞, угол Штольца, произведения М.М.Джрбашяна*

Пусть $\lambda(x) \in C^1[1, +\infty)$ – монотонно возрастающая положительная функция. Порядком функции $\lambda(x)$ называется следующий предел $\alpha_\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\lambda'(x)}{\lambda(x)}$.

Пусть также $U = \{z; |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости, $H(U)$ – множество всех голоморфных в круге U функций. Рассмотрим следующий класс функций:

$$X_\lambda^\infty = \left\{ f(z) : f(z) \in H(U); \ln|f(z)| \le C_f \cdot \lambda\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right\}$$

Если $\lambda(x)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_1^\infty \left(\frac{\lambda(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx < +\infty, \tag{1.1}$$

то положительные нули функций из класса X_λ^∞ фактически описываются условием Бляшке $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1 - r_k) < +\infty$. Если же интеграл (1.1) расходится, то такое описание неверно (см. [1]). В случае, когда $1 < \alpha_\lambda < +\infty$, полное описание нулей функций из классов X_λ^∞ получено Ф. А. Шамояном в [2]. Им же получена полная характеристика положительных нулей функций из класса X_λ^∞ в случае, когда $\alpha_\lambda = +\infty$ [3]. Открытым осталось описание плотности положительных нулей классов X_λ^∞ в случае, когда $\alpha_\lambda = 1$ и интеграл (1.1) расходится.

В [4] удалось получить условие для плотности лежащих в угле Штольца нулей функций классов X_λ^∞ с $\alpha_\lambda = 1$ и с расходящим интегралом (1.1). Эта заметка дает исчерпывающий ответ поставленной выше задачи в случае, когда нули функции из класса X_λ^∞ находятся в некотором угле Штольца, причем, как оказывается, фунтаментальную роль в решении этой задачи играют произведения М. М. Джрбашяна образца 1945-1948 г.(см [5,6]).

2. Дадим некоторые сведения о произведениях М. М Джрбашяна, которыми будем пользоватся в дальнейшем. Как и в [5,6], обозначим через A_α^* $(-1 < \alpha < +\infty)$ класс аналитических фумнкций f в круге U, для которых

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r^2)^\alpha \ln^+ |f(re^{i\theta})| r dr d\theta < +\infty.$$

М. М. Джрбашяном была установлена каноническая факторизация классов A_α^*, а именно доказана следующая

Теорема. *Если $f \in A_\alpha^*$, $(-1 < \alpha < +\infty)$, $f(0) = 1$ и $\{z_k\}$ — множество нулей функции $f(z)$, то*

$$\sum (1 - |z_k|)^{\alpha+2} < +\infty. \tag{2.1}$$

Функция f допускает следующую факторизацию:

$$f(z) = \pi_\alpha(z, \{z_k\}) \cdot \exp\left\{ \frac{\alpha+2}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \ln |f(\rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \right\}, \quad z \in U. \tag{2.2}$$

где

$$\pi_\alpha(z, \{z_k\}) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) exp\left\{ -\frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha ln \left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{z_k}\right|}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \rho d\rho d\theta \right\}, \tag{2.3}$$

причем при условии (2.1) бесконечное произведение (2.3) М. М. Джрбашяна равномерно сходится внутри U.

Пусть

$$U_\alpha(z, \xi) = \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \ln \left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\xi}\right|}{(1 - z\rho e^{i-\theta})^{\alpha+2}} \rho d\rho d\theta, \quad \xi, z \in U, \ \xi \notin 0. \tag{2.1}$$

Следуя В. С. Захаряну [7], обозначим

$$E_\alpha(z, z_k) = \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-U_\alpha(z, z_k)}. \tag{2.5}$$

В [6] М.М. Джрбашяном доказано, что

$$U_\alpha(z,\xi)=\int\limits_{|\xi|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t}dt-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+n)}\left(\frac{z}{\xi}\right)^n\int\limits_0^{|\xi|^2}(1-t)^{\alpha+1}t^{n-1}dt, \qquad (2.6)$$

а когда $|z|<|\xi|$, то

$$E_\alpha(z,\xi)=exp\left\{-\int\limits_{|\xi|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1-\frac{z}{\xi}t\right)^{\alpha+2}}\cdot\frac{dt}{t}\right\} \qquad (2.7)$$

В. С. Захаряном в [7] доказано, что когда $|z|<|\xi|$, то

$$\ln E_\alpha(|z|,|\xi|)\le\ln|E_\alpha(z,\xi)|. \qquad (2.8)$$

а в [2] Ф. А. Шамояном показано, что при условии (2.1) для произведений $\pi_\alpha(z,\{z_n\})$ имеет место следующее неравенство:

$$\ln|\pi_\alpha(z,\{z_n\})|\le\mathrm{const}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-|z_n|)^{\alpha+2}}{|1-\bar{z}_n z|^{\alpha+2}}. \qquad (2.9)$$

3. Основные результаты. Сначала докажем справедливость следующего утверждения:

Лемма 3.1. *Пусть $\lambda(x)\in C^1[1,+\infty)$ — монотонно возрастающая, положительная функция первого порядка с расходящимся интегралом (1.1), m — любое натуральное число, $\alpha>1$ — любое число*

$$I(r)=\int\limits_0^r\left(\frac{\lambda\left(\frac{1}{1-u}\right)}{1-u}\right)^{\frac{1}{2}}du. \qquad (3.1)$$

$$R(r)=\frac{I^2(r)\cdot\prod\limits_{i=0}^{m-1}\ln_i I(r)\cdot(\ln_m I(r))^\alpha}{\lambda\left(\frac{1}{1-r}\right)}, \qquad (3.2)$$

где $\ln_0 x=1$, $\ln_1=\ln x,\dots,\ln_i x=\ln\ln_{i-1}x$, при $i\ge2$, пусть еще $z=re^{i\varphi}\in U$, $\xi\in U$. Тогда, если $|z-\xi|\le\frac{R(r)-(1-r)}{r}$, то

$$\ln|E_\alpha(z,\xi)|\le0,\ (-1<\alpha<+\infty),$$

для тех z, для которых $|z|=r$ достаточно близко к 1.

Доказательство. Из (2.5), (2.6) и из условия леммы следует, что

$$\begin{aligned}\ln|E_\alpha(z,\xi)|\le\ln\frac{1}{|\xi|}+\ln\frac{R(r)-(1-r)}{r}-\frac{(1-|\xi|^2)^{\alpha+2}}{\alpha+2}+\\+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+2+n)\cdot|\xi|^n}{\Gamma(\alpha+2)\cdot\Gamma(1+n)}\cdot\frac{|z|^n}{n}.\end{aligned} \qquad (3.3)$$

Не трудно увидеть, что для любого β, $0 < \beta < 1$, существует N такое, что как только $n > N$, то

$$\frac{\Gamma(\alpha+2+n)\cdot|\xi|^n}{\Gamma(\alpha+2)\cdot\Gamma(1+n)} < \beta.$$

Учитывая этот факт из (3.3) получается

$$\ln|E_\alpha(z,\xi) \le \ln\frac{R(r)-(1-r)}{r(1-r)^\beta} + \ln\frac{1}{|\xi|} - \frac{(1-|\xi|^2)^{\alpha+2}}{\alpha+2} +$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\frac{\Gamma(\alpha+2+n)\cdot|\xi|^n}{\Gamma(\alpha+2)\cdot\Gamma(1+n)}\cdot\frac{|z|^n}{n} - \beta\cdot\sum_{n=1}^{N}\frac{|z|^n}{n}$$

Отсюда и следует справедливость утверждения леммы.

Теорема 3.1. *Пусть $\lambda(x) \in C^1[1,+\infty)$ монотонно возрастающая, положительная функция первого порядка с расходящимся интегралом (1.1), $\{z_n\} \subset U$ последовательность комплексных чисел лежащих в угле Штольца с вершиной в точке $z = 1$ такая, что для некоторого натурального числа m и для некоторого числа a, $a > 1$*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|z_n|}{I^2(|z_n|)\cdot\prod\limits_{i=0}^{m-1}\ln_i I(|z_n|)\cdot(\ln_m I(|z_n|))^a} < +\infty \qquad (3.4)$$

Тогда $\pi_\alpha(z,\{z_n\}) \in X_\lambda^\infty$, $(-1 < \alpha < +\infty)$.

Доказательство. Не влияя на общность решения, можно предпологать, что $\{z_n\}$ является последовательностью положительных чисел. Пусть $z = re^{i\varphi}$, $z_k = r_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Заметим, что обозначая через $n(r)$ количество точек r_n в промежутке $[0, r]$, из условия (3.4) получаем

$$n(r) \le \gamma(r) = \frac{S\cdot I^2(r)\cdot\prod\limits_{i=0}^{m-1}\ln_i I(r)\cdot(\ln_m I(r))^a}{1-r}, \qquad (3.5)$$

где S — сумма ряда (3.4). Ползуясь оценкой (2.9) получаем

$$\ln|\pi_\alpha(z,\{z_n\})| \le \text{const}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-r_n^2}{|1-r_n z|}\right)^{\alpha+2} \le$$
$$\le \text{const}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-r_n^2)^{\alpha+2}}{\left[(1-r_n r)^2 + 4r_n r\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{\alpha}{2}+1}}. \qquad (3.6)$$

Отсюда, когда z такое, что кроме, может быть, конечного числа r_n выполняется неравенство

$$\left[(1-r_n r)^2 + 4r_n r\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{\alpha}{2}+1} \ge \text{const}\cdot(1-r_n)^{\alpha+2}\cdot\gamma(r_n), \qquad (3.7)$$

из (3.6) и (3.4) получаем

$$\ln|\pi_\alpha(z,\{r_n\})| \le \text{const} + \text{const}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma(r_n)} = \text{const}. \qquad (3.8)$$

Заметим, что (3.7) имеет место, например, когда $\sin^2\frac{\varphi}{2} > \delta > 0$. Теперь пусть $\varphi = 0$. Тогда

$$\ln|\pi_\alpha(r,\{r_n\})| = \sum_{0<r_n\le\frac{1-R(r)}{r}} \ln|E_\alpha(r,\{r_n\})| + \sum_{\frac{1-R(r)}{r}<r_n\le r} \ln|E_\alpha(r,\{r_n\})| + \\ + \sum_{r_n>r} \ln|E_\alpha(r,\{r_n\})| = A_1 + A_2 + A_3. \tag{3.9}$$

Пользуясь (2.9) оценим сверху A_1:

$$A_1 = \sum_{0<r_n\le\frac{1-R(r)}{r}} \ln|(r,\{r_n\})| \le \text{const} \sum_{0<r_n\le\frac{1-R(r)}{r}} \left(\frac{1-r_n^2}{1-r_nr}^{\alpha+2}\right) \le$$

$$\le \text{const}\cdot\gamma\left(\frac{1-R(r)}{r}\right) \le \text{const}\cdot\frac{I^2(r)\cdot\prod\limits_{i=0}^{m-1}\ln_i I(r)\cdot(\ln_m I(r))^a}{1-\dfrac{1-R(r)}{r}} \le$$

$$\le \text{const}\cdot\frac{I^2(r)\cdot\prod\limits_{i=0}^{m-1}\ln_i I(r)\cdot(\ln_m I(r))^a}{R(r)}.$$

Откуда, пользуясь видом (3.2) функции $R(r)$, получаем

$$A_1 \le \text{const}\cdot\lambda\left(\frac{1}{1-r}\right). \tag{3.10}$$

Из леммы (3.1) следует, что

$$A_2 \le 0, \tag{3.11}$$

а из неравенства (2.8) получаем

$$I_3 \equiv \sum_{r_n>r} \ln|E_\alpha(r,\{r_n\})| \le \sum_{r_n>r} \ln|E_\alpha(re^{i\varphi},\{r_n\})|.$$

Взяв $0<\delta<\varphi<2\pi-\delta$, где $0<\delta<1$, из (3.7) и (3.8) получаем

$$I_3 \le \text{const}. \tag{3.12}$$

Из (3.9) – (3.12) следует, что

$$\ln|\pi_\alpha(r,r_n)| \le \text{const}\cdot\lambda\left(\frac{1}{1-r}\right). \tag{3.13}$$

Остается доказать теорему только в том случае, когда $\varphi \ne 0$ и для бесконечного числа точек r_n имеет такое неравенство

$$\left[(1-r_nr)^2 + 4r_nr\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{a}{2}+1} \le \text{const}\cdot(1-r_n)^{\alpha+2}\cdot\gamma(r_n). \tag{3.14}$$

Отсюда следует справедливость следующих неравенств:

$$1-r_nr \le \text{const}\cdot(1-r_n)\cdot(\gamma(r_n))^{\frac{1}{\alpha+2}}, \tag{3.15}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} \le \text{const}\cdot(1-r_n)\cdot(\gamma(r_n))^{\frac{1}{\alpha+2}}. \qquad (3.16)$$

Когда $\dfrac{1-R(r)}{r} \le r_n \le r$, то из (3.16) следует

$$\sin\frac{\varphi}{2} \le \cos\frac{R(r)-(1-r)}{r}\cdot(\gamma(r_n))^{\frac{1}{\alpha+2}} \le \text{const}\cdot R(r)\cdot(\gamma(r_n))^{\frac{1}{\alpha+2}} =$$
$$= \text{const}\cdot\frac{1-r}{\lambda\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}(\gamma(r))^{1+\frac{1}{\alpha+2}} \le \text{const}\cdot(1-r)^{1-\varepsilon},$$

где $0<\varepsilon<1$ любое число. Таким образом, когда $\dfrac{1-R(r)}{r} \le r_n \le r$ и имеет место (3.14), то для любого ε, $0<\varepsilon<1$, имеем

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} \le (1-r)^{1-\varepsilon}. \qquad (3.17)$$

Легко видеть, что

$$\left|z-\frac{1-R(r)}{r}\right| = \frac{1}{r}\left[(R(r)-(1-r^2))^2+4r^2(1-R(r))\cdot\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.18)$$

В случае, когда $\sin^2\dfrac{\varphi}{2} \le \text{const}\cdot(R(r)-(1-r^2))^2$, получается

$$\left|z-\frac{1-R(r)}{r}\right| \le \text{const}\cdot\frac{R(r)-(1-r^2)}{r}.$$

Следовательно, если $|z-r_n| \le \left|z-\dfrac{1-R(r)}{r}\right|$, то из леммы 3.1 для этого случая получаем

$$\ln|E_\alpha(z,r_n)| \le 0. \qquad (3.19)$$

Теперь пусть $\dfrac{1-R(r)}{r} \le r_n \le r$ и

$$\text{const}\cdot\left[\frac{R(r)-(1-r^2)}{r}\right]^2 < \sin^2\frac{\varphi}{2} < (1-r)^{1-\varepsilon}. \qquad (3.20)$$

Тогда из неравенства (2.9) получаем

$$\sum_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r}\ln|E_\alpha(z,r_n)| \le \sum_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r}\frac{(1-r_n^2)^{\alpha+2}}{|1-r_nz|^{\alpha+2}} =$$
$$= \sum_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r}\frac{(1-r_n^2)^{\alpha+2}}{\left[(1-r_nr)^{\alpha+2}+4r_nr\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\right]^{\frac{\alpha}{2}+1}} \le$$
$$\le \text{const}\cdot\sup_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r}\frac{(1-r_n)^{\alpha+1}\cdot I^2(r_n)\cdot\prod_{i=0}^{m-1}\ln_i I(r_n)\cdot(\ln_m I(r_n))^a}{\left[(1-r_nr)^2+4r_nr\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\right]^{\frac{\alpha}{2}+1}}$$
$$\sum_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r}\frac{1-r_n}{I^2(r_n)\cdot\prod_{i=0}^{m-1}\ln_i I(r_n)\cdot(\ln_m I(r_n))^a}.$$

Отсюда, пользуясь условиями (3.20) и условием теоремы (3.4), получаем

$$\sum_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r}\ln|E_\alpha(z,r_n)|\le \text{const}\cdot\frac{(R(r)-(1-r))^{\alpha+1}\cdot I^2(r)\cdot\prod_{i=0}^{m-1}\ln_i I(r)\cdot(\ln_m I(r))^\alpha}{(R(r))^{\alpha+2}}\le$$

$$\le \text{const}\,\frac{I^2(r)\cdot\prod_{i=0}^{m-1}\ln_i I(r)\cdot(\ln_m I(r))^\alpha}{R(r)}=\text{const}\cdot\lambda\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Таким образом

$$\sum_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r}\ln|E_\alpha(z,r_n)|\le \text{const}\,\lambda\left(\frac{1}{1-r}\right). \tag{3.21}$$

Теперь перейдем к оценке сверху $\ln|\pi_\alpha(z,\{r_n\})|$, $-1<\alpha<+\infty$, при условии (3.14):

$$\begin{aligned}\ln|\pi_\alpha(z,\{r_n\})|=&\sum_{0<r_n<\frac{1-R(r)}{r}}\ln|E_\alpha(z,r_n)|+\sum_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r}\ln|E_\alpha(z,r_n)|+\\&+\sum_{r_n>r}\ln|E_\alpha(z,r_n)|\equiv A_4+A_5+A_6.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Пользуясь (2.9), не трудно аналогичным доказательству неравенства (3.10) образом доказать справедливость неравенства

$$A_4\le \text{const}\ \lambda\left(\frac{1}{1-r}\right). \tag{3.23}$$

Из неравенств (3.19) и (3.21) следует, что

$$A_5\le \text{const}\ \lambda\left(\frac{1}{1-r}\right) \tag{3.24}$$

Когда $r_n>|z|$, то из (2.7) имеем

$$\ln|E_\alpha(z,r_n)|=-Re\int_{r_n^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}\cdot\left(1-\frac{tr}{r_n}\cos\varphi+i\frac{tr}{r_n}\sin\varphi\right)^{\alpha+2}}{\left[\left(1-\frac{tr}{r_n}\right)^2+\frac{4tr}{r_n}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\alpha+2}}\cdot\frac{dt}{t}. \tag{3.25}$$

Но так как $Re\left(1-\frac{tr}{r_n}\cos\varphi+i\frac{tr}{r_n}\sin\varphi\right)^{\alpha+2}=\left[\left(1-\frac{tr}{r_n}\right)^2+\frac{4tr}{r_n}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{\alpha+2}{2}}$

$\cos\left[(\alpha+2)\operatorname{arctg}\dfrac{\frac{tr}{r_n}\sin\varphi}{1-\frac{tr}{r_n}\cos\varphi}\right]$, из (3.25) получаем

$$\ln|E_\alpha(z,r_n)| \le -\int_{r_n^2}^{1} \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left[\left(1-\frac{tr}{r_n}\right)^2+\frac{4tr}{r_n}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{\alpha+2}{2}}}dt \le$$

$$\le \frac{1}{\left[(1-r_nr)^2+\frac{4r}{r_n}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{\alpha+2}{2}}}\cdot\int_{r_n^2}^{1}(1-t)^{\alpha+1}dt =$$

$$= -\frac{(1-r_n)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)\cdot\left[(1-r_nr)^2+\frac{4r}{r_n}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{\alpha+2}{2}}} < 0.$$

Это означает, что

$$A_6 \le 0. \tag{3.26}$$

Из (3.22)-(3.24), (3.26) следует, что и в этом случае

$$\ln|\pi_\alpha(z,\{r_n\})| \le \mathrm{const}\cdot\lambda\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть $\lambda(x)\in C^1[1,+\infty]$ – монотонно возрастающая, положительная функция первого порядка с расходящимся интегралом (1.1).*

- *Если $\{z_n\}\subset U$ – последовательность комплексных чисел, лежащих в некотором угле Штольца, такая, что для некоторого натурального числа m и для некоторого числа a, $a>1$, ряд (3.4) сходится, то существует $f(z)$, $f(z)\in X_\lambda^\infty$ такая, что $f(z_n)=0$.*

- *Если $f(z)\in X_\lambda^\infty$, $\{z_n\}\subset U$ – последовательность комплексных чисел, лежащих в угле Штольца, такая, что $f(z_n)=0$, то для любого натурального числа m и для любого числа a, $a>1$ ряд (3.4) сходится.*

Доказательство первой части следует из теоремы 3.1., а вторая часть доказана в работе [4] при условии, что существует следующий конечный или бесконечный предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\lambda'(x)}{\lambda(x)}\right)\ln x.$$

Однако нетрудно убедиться, что при доказательстве пункта 2 упомянутой теоремы это условие можно опустить.

Государственный инженерный университет Армении

Р. В. Даллакян

Полная характеристика лежащих в углах Штольца нулей одного класса аналитических в круге функций

Доказывается теорема, дающая полную характеристику нулей функций классов X_λ^∞, лежащих в углах Штольца, где $\lambda(x)$ – функция первого порядка такая, что $\int\limits_1^\infty \left(\frac{\lambda(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx = +\infty$.

Ռ. Վ. Դալլաքյան

Անալիտիկ ֆունկցիաների մի դասի Շտոլցի անկյուններում ընկած զրոների լրիվ բնութագիրը

Ապացուցված է թեորեմ, որը փալիս է X_λ^∞-դասի ֆունկցիաների Շտոլցի անկյուններում գտնվող զրոների լրիվ բնութագիրը, որտեղ $\lambda(x)$-ը առաջին կարգի ֆունկցիա է այնպիսին, որ $\int\limits_1^\infty \left(\frac{\lambda(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx = +\infty$:

R. V. Dallakyan

The Whole Characteristic of the Zeros Inside the Shtolt's Angles and the Analitytical Functions Having the Same Class

One proved theorem gives the whole characteristics of the zeros inside the Shtolt's angles and of the X_λ^∞ class functions where $\lambda(x)$ is the first order functions such as $\int\limits_1^\infty \left(\frac{\lambda(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx = +\infty$.

Литература

1. *Hayman W.K., Korenblum B.* - Michigan Math. J. 1980. V. 27. P. 21-30.
2. *Шамоян Ф. А.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1978. Т. 13. С. 405-422.
3. *Шамоян Ф.А.* - Записки научных семинаров ЛОМИ. 2010. Т. 376. С. 176-180.
4. *Даллакян Р.В.* - ДАН АрмССР. 1988. Т. 87. N 3. С. 99-103.
5. *Джрбашян М.М.* - ДАН АрмССР. 1945. Т. 3. N 1. С. 3-9.
6. *Джрбашян М.М.* - Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР. 1948. Вып. 2. С. 3-55.
7. *Захаряна В.С.* - Мат. сборник. 1963. Т. 63(105). N 1. С. 3-22.