

УДК 517.927, 517.968, 517.984

А. Г. Камалян^{1,2}, академик А. Б. Нерсисян², И. Г. Хачатрян¹

Интегральные операторы \mathcal{L} -свертки на полуоси

(Представлено 6/XII 2010)

Ключевые слова: дифференциальный оператор, интегральное уравнение, оператор \mathcal{L} -свертки, разрешимость, фредгольмовость

1. Введение. Анализ структуры резольвенты интегральных операторов на конечном отрезке с ядрами, удовлетворяющими определенным дифференциальным уравнениям в частных производных, показал близость свойств этих операторов к интегральным операторам с разностным ядром [1]. Осмысление этого факта привело к понятию интегральных операторов \mathcal{L} -свертки на всей оси (см. [2], а также [3]). В данной работе вводится и исследуется интегральный оператор \mathcal{L} -свертки на полуоси.

2. Дифференциальный оператор \mathcal{L} . Рассмотрим на $R_+ = (0, \infty)$ дифференциальную операцию ℓ порядка $m = 2n$:

$$\ell = (-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} p_{2k}(x) \frac{d^k}{dx^k} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^{k+1} i}{2} \left\{ \frac{d^k}{dx^k} p_{2k+1}(x) \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} + \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} p_{2k+1}(x) \frac{d^k}{dx^k} \right\}, \quad (1)$$

где i — мнимая единица, а каждый коэффициент $p_k(x)$ ($0 \leq k \leq m-2$) вещественная функция на R_+ , удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 x^{2n-1-k} |p_k(x)| dx + \int_1^\infty |p_k(x)| dx < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, m-2. \quad (2)$$

Для заданной на R_+ функции y точный смысл выражения $\ell(y)$ описывается при помощи квазипроизводных $y^{[\nu]}$ ($\nu = 0, 1, \dots, m$), определяемых по формулам

$$y^{[0]} = y, \quad y^{[k]} = \frac{1}{i^k} \frac{d^k y}{dx^k}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$y^{[n+1]} = \frac{1}{2} p_{2n-3} y^{[n-2]} + p_{2n-2} y^{[n-1]} + \frac{1}{i} \frac{d}{dx} (y^{[n]}),$$

$$y^{[m-k]} = \frac{1}{2} p_{2k-1} y^{[k-1]} + p_{2k} y^{[k]} + \frac{1}{2} p_{2k+1} y^{[k+1]} + \frac{1}{i} \frac{d}{dx} (y^{[m-1-k]}), \quad k = 1, 2, \dots, n-2.$$

$$y^{[m]} = p_0 y^{[0]} + \frac{1}{2} p_1 y^{[1]} + \frac{1}{i} \frac{d}{dx} (y^{[m-1]}),$$

где $p_{m-1} = 0$. Считается, что выражение $\ell(y)$ имеет смысл (т.е. операция ℓ применима к функции y), если все квазипроизводные $y^{[\nu]}$ ($\nu = 0, 1, \dots, m-1$) существуют и абсолютно непрерывны на R_+ (т.е. на каждом конечном отрезке $[\alpha, \beta] \subset R_+$). При этом полагается $\ell(y) = y^{[m]}$. Если выражения $\ell(y)$, $\ell(z)$ имеют смысл, то для $x \in R_+$ обозначим $\ell^*(y) = \overline{\ell(\bar{y})}$ и

$$[y, z]_x = \sum_0^{m-1} y^{[m-1-\nu]}(x) z^{[\nu]}(x).$$

В пространстве $L^2(R_+)$ введем операторы \mathcal{L}' и \mathcal{L}'_0 (см. [4,5]). Область определения \mathcal{D}' оператора \mathcal{L}' есть множество всех функций $y \in L^2(R_+)$, для которых выражение $\ell(y)$ имеет смысл и $\ell(y) \in L^2(R_+)$, а оператор \mathcal{L}' действует на функцию $y \in \mathcal{D}'$ по правилу $\mathcal{L}'(y) = \ell(y)$. Оператор \mathcal{L}'_0 есть сужение оператора \mathcal{L}' на линейное многообразие $\mathcal{D}'_0 \subset \mathcal{D}'$, состоящее из всех тех функций $y \in \mathcal{D}'$, которые обращаются в нуль вне некоторого конечного отрезка $[\alpha, \beta] \subset R_+$ (своего для каждой функции). Оператор \mathcal{L}'_0 является симметрическим оператором и \mathcal{L}' является сопряженным к \mathcal{L}'_0 оператором ($\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}'$). Обозначим через \mathcal{L}_0 замыкание оператора \mathcal{L}'_0 , а через $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}'$ — область его определения. Операторы \mathcal{L}_0 и \mathcal{L}'_0 назовем соответственно максимальным и минимальным замкнутым симметрическим операторами, порожденными дифференциальной операцией ℓ .

Для любых функций $y, z \in \mathcal{D}'$ существуют пределы $[y, z]_0 = \lim_{x \rightarrow 0} [y, z]_x$, $[y, z]_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} [y, z]_x$, $y(0) = \lim_{x \rightarrow 0} y(x)$. Кроме того функция $y \in \mathcal{D}'$ принадлежит \mathcal{D}_0 тогда и только тогда, когда

$$y^{[\nu]}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} y^{[\nu]}(x) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Симметрический оператор \mathcal{L}_0 имеет равные конечные дефектные числа и по этой причине допускает самосопряженные расширения. Как известно (см. [5]), область определения \mathcal{D} всякого самосопряженного расширения \mathcal{L} оператора \mathcal{L}_0 состоит из тех и только тех функций $y \in \mathcal{D}'$, которые

удовлетворяют краевым условиям

$$[y, z_k]_0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где $z_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — некоторые линейно независимые по модулю D_0 функции из D' , такие, что

$$[z_k, z_j]_0 = 0, \quad k, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

При этом $Ly = L'y = \ell(y)$ для $y \in D$. Обратно, для любых линейно независимых по модулю D_0 функций $z_k \in D'$ ($k = 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющих соотношениям (4), краевые условия (3) порождают область определения некоторого самосопряженного расширения оператора L_0 . В частности, такими являются краевые условия $y^{(\nu)}(0) = 0$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$).

Пусть L — некоторое самосопряженное расширение оператора L_0 . Обозначим через T^+ (T^-) множество всех тех чисел $\lambda > 0$ (соответственно, $\lambda = 0$ или $\arg \lambda = \frac{\pi}{2n}$), для которых λ^{2n} является собственным значением оператора L . Положим $T = T^+ \cup T^-$. Для $\lambda \in T$ кратность собственного значения λ^{2n} обозначим через r_λ , а соответствующее собственное подпространство — через H_λ . Как известно (см. [5]), $r_\lambda \leq n$ для $\lambda \in T^-$ и $r_\lambda \leq n-1$ для $\lambda \in T^+$. Рассмотрим также ортонормированную систему собственных функций $v_s(x, \lambda) = v_{\lambda, s}(x)$ ($\lambda \in T$; $s = 1, 2, \dots, r_\lambda$) и порожденные ими функционалы $V_{\lambda, s}$ ($\lambda \in T$; $s = 1, \dots, r_\lambda$), определенные равенствами:

$$V_{\lambda, s} f = \tilde{f}_s(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \overline{v_{\lambda, s}(x)} dx \quad (f \in L^2(\mathbb{R}_+)).$$

Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus T^+$ уравнение $\ell(y) = \lambda^{2n}y$ имеет с точностью до постоянного множителя одно нетривиальное ограниченное на \mathbb{R}_+ решение $u(x, \lambda)$, удовлетворяющее краевым условиям (3). Функция $u(x, \lambda)$ непрерывна по обеим переменным на множестве $x > 0$, $\lambda \in (0, \infty) \setminus T^+$ и по непрерывности определяется также для значений $\lambda \in T^+$. Функция $u(x, \lambda)$ называется нормированной обобщенной собственной функцией оператора L , соответствующей непрерывному спектру, равному $[0, \infty]$ (см. [5]).

Для каждой функции $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ интеграл

$$(Uf)(\lambda) = \tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty \overline{u(x, \lambda)} f(x) dx, \quad \lambda > 0,$$

сходится по норме $L^2(\mathbb{R}_+)$ и определяет частично изометрический оператор U , отображающий $L^2(\mathbb{R}_+)$ на себя, причем $\ker U$ совпадает с замыканием H

линейной оболочки всех собственных функций оператора \mathcal{L} , а $U\mathcal{L}U^*$ является оператором умножения на функцию λ^{2n} в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

3. **Интегральный оператор \mathcal{K} .** Пусть \mathcal{L} – самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}_+)$ (с областью определения \mathcal{D}), порожденный операцией ℓ и краевыми условиями (3).

Ниже будем предполагать, что $0 \notin T$. Последнее имеет место, например, когда

$$\int_0^{\infty} x^{2n-1-k} |p_k(x)| dx < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-2.$$

Функцию $K(x, t)$ ($x, t \in \mathbb{R}_+$) будем называть ядром \mathcal{L} -свертки на полуоси, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) операция ℓ применима к $K(x, t)$ по каждой переменной и $\ell_x(K(x, t)) = \ell_t^{\#}(K(x, t))$, $x > 0, t > 0$;

б) $\overline{K(x, t)}$ для каждого $x > 0$ как функция от t принадлежит \mathcal{D} ;

с) квазипроизводные по x $K_x^{(\nu)}(x, t)$ ($\nu = 0, 1, \dots, 2n$) функции $K(x, t)$ непрерывны по обоим переменным, а интегралы

$$\int_0^{\infty} |K_x^{(\nu)}(x, t)| dt, \quad \nu = 0, 1, \dots, 2n$$

сходятся равномерно относительно x на каждом конечном отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+$;

д) выполняются соотношения

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{\infty} |[K(x, t), z_k(x)]_x| dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $z_k(x)$ – функции из краевых условий (3);

е) существует такое число $M > 0$, что для всех $x > 0$

$$\int_0^{\infty} |K(x, t)| dt \leq M,$$

причем для любого $\beta > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} |K(x, t)| dt = 0.$$

Рассмотрим теперь интегральное преобразование \mathcal{K} , определяемое равенством

$$\mathcal{K}y(x) = \int_0^{\infty} K(x, t) y(t) dt, \quad x > 0. \quad (5)$$

С учетом условий б) и е) это преобразование применимо к любой функции $u \in L^2(\mathbb{R}_+) \cup L^\infty(\mathbb{R}_+)$.

В силу условия е) преобразование \mathcal{K} определяет в $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ ограниченный линейный оператор, спектр которого обозначим через $\sigma_\infty(\mathcal{K})$.

Преобразование \mathcal{K} определяет в $L^2(\mathbb{R}_+)$ линейный оператор, который может не быть ограниченным. Область определения $\mathcal{D}_\mathcal{K}$ этого оператора состоит из тех функций $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$, для которых $\mathcal{K}u \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Для операторов в $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ и в $L^2(\mathbb{R}_+)$, определенных равенством (5), также будем использовать обозначение \mathcal{K} . Действующий в $L^2(\mathbb{R}_+)$ оператор \mathcal{K} будем называть оператором \mathcal{L} -свертки на полуоси.

3.1. Представление ядра.

Теорема 1. Пусть $w_{\lambda,s} = \mathcal{K}v_{\lambda,s}$ ($\lambda \in T$, $s = 1, \dots, r_\lambda$) и $w(x, \lambda) = (\mathcal{K}u_\lambda)(x)$ ($x, \lambda \in \mathbb{R}_+$), где $u_\lambda(x) = u(x, \lambda)$. Тогда

а) $w_{\lambda,k} = \sum_{j=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda) v_{\lambda,j}$, где числа $c_{jk}(\lambda)$ определяются из равенств $c_{jk}(\lambda) = V_{\lambda,j} w_{k,\lambda}$ ($\lambda \in T$; $j, k = 1, 2, \dots, r_\lambda$). Для каждого $\lambda \in T$ спектр матрицы $\Phi_\lambda = (c_{jk}(\lambda))_{j,k=1}^{r_\lambda}$ содержится в $\sigma_\infty(\mathcal{K})$. В частности, если λ^{2n} является простым собственным значением (т.е. $r_\lambda = 1$), то $c_{11}(\lambda) \leq \|\mathcal{K}\|_\infty$;

б) $w(x, \lambda) = c(\lambda) u(x, \lambda)$ ($x, \lambda \in \mathbb{R}_+$), где $c(\lambda)$ — непрерывная и ограниченная функция на \mathbb{R}_+ , принимающая значения на $\sigma_\infty(\mathcal{K})$. Кроме того, $w(x, \lambda)$ и $\lambda^{2n} w(x, \lambda)$ при каждом $x > 0$ как функции от λ принадлежат $L^2(\mathbb{R}_+)$. При условиях

$$\int_0^\infty |p_k(x)| dx < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, 2n - \lambda.$$

для функции $c(\lambda)$ имеет место соотношение $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{2n} c(\lambda) = 0$;

в) ядро $K(x, t)$ \mathcal{L} -свертки на полуоси допускает представление

$$K(x, t) = \int_0^\infty c(\lambda) u(x, \lambda) \overline{u(t, \lambda)} d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{j,k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda) v_j(x, \lambda) \overline{v_k(t, \lambda)}. \quad (6)$$

При этом ядро $K(x, t)$ удовлетворяет условию симметрии $K(x, t) = \overline{K(t, x)}$ тогда и только тогда, когда $c_{jk}(\lambda) = \overline{c_{kj}(\lambda)}$ ($\lambda \in T$; $j, k = 1, 2, \dots, r_\lambda$) и $c(\lambda)$ — вещественная.

3.2. Ограниченность. При исследовании ограниченности оператора \mathcal{K} важную роль играет (см. п. 3.2 выше) множество

$$\Delta = \{|c_{jk}(\lambda)| : \lambda \in T; j, k = 1, 2, \dots, r_\lambda\}.$$

Теорема 2. Оператор \mathcal{K} \mathcal{L} -свертки на полуоси имеет плотную в $L^2(\mathbb{R}_+)$ область определения $\mathcal{D}_\mathcal{K}$, причем $H^\perp \subset \mathcal{D}_\mathcal{K}$ и H^\perp является инвариантным

подпространством для K , а сужение оператора K на H^1 ограничено. Кроме того, оператор K ограничен тогда и только тогда, когда ограничено множество Δ . В частности, если число непростых собственных значений оператора L конечно или ядро $K(x, t)$ симметрично, то оператор K ограничен. В случае ограниченности оператора K H также является инвариантным подпространством для K .

3.3. Представление оператора.

Теорема 3. Пусть K – интегральное преобразование (5). Тогда при каждом $x > 0$ для любой $y \in L^2(\mathbb{R}_+)$ справедливо равенство

$$(Ky)(x) = \int_0^\infty c(\lambda) \bar{y}(\lambda) u(x, \lambda) d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{j=1}^{r_\lambda} v_j(x, \lambda) \sum_{k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda) \bar{y}_k(\lambda).$$

Для ограниченного оператора K L -свертки на полуоси справедливо равенство

$$K = U^* \Lambda_c U + \sum_{\lambda \in T} \tau_\lambda^{-1} \Phi_\lambda \tau_\lambda P_\lambda,$$

где Λ_c – оператор умножения на функцию $c(\lambda)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ (т.е. $(\Lambda_c y)(\lambda) = c(\lambda) y(\lambda)$ для $y \in L^2(\mathbb{R}_+)$), P_λ – оператор ортогонального проектирования на H_λ , а τ_λ – изометрическое отображение пространства H_λ на r_λ -мерное евклидово пространство \mathbb{C}^{r_λ} , определяемое равенством

$$\tau_\lambda \left(\sum_{k=1}^{r_\lambda} \eta_k v_k(x, \lambda) \right) = \text{col}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{r_\lambda}).$$

4. Разрешимость интегрального уравнения. Рассмотрим интегральное уравнение $(\zeta I + K)f = g$, где K – оператор L -свертки на полуоси, $\zeta \in \mathbb{C}$, $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ – заданная и $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ – искомая функции.

Теорема 4. Пусть $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и выполнены следующие два условия:

- 1) функция $\bar{g}(\lambda)(\zeta + c(\lambda))^{-1}$ принадлежит $L^2(\mathbb{R}_+)$,
- 2) для каждого $\lambda \in T$ система алгебраических уравнений

$$\zeta z_j(\lambda) + \sum_{k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda) z_k(\lambda) = \bar{g}_j(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots, r_\lambda,$$

относительно неизвестных $z_j(\lambda)$ имеет решение, причем

$$\sum_{\lambda \in T} \sum_{j=1}^{r_\lambda} |z_j(\lambda)|^2 < \infty.$$

Тогда функция

$$f(x) = \int_0^\infty u(x, \lambda) \frac{\bar{g}(\lambda)}{\zeta + c(\lambda)} d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{j=1}^{r_\lambda} v_j(x, \lambda) z_j(\lambda), \quad x > 0,$$

принадлежит $L^2(\mathbb{R}_+)$ и является решением уравнения $(\zeta I + \mathcal{K})f = g$. При этом в случае, когда оператор \mathcal{K} ограничен, условия 1) и 2) также необходимы для разрешимости уравнения.

5. Фредгольмовость интегрального оператора. Приведем теперь условие фредгольмовости оператора $\zeta I + \mathcal{K}$ и вид его обобщенного обратного $(\zeta I + \mathcal{K})^{(-1)}$ (см. [6]). Ниже под нормой $\|\Phi\|$ матрицы Φ порядка $k \times k$ будем подразумевать норму оператора, действующего в k -мерном евклидовом пространстве и определенного этой матрицей. Единичную матрицу порядка $k \times k$ будем обозначать через E_k .

Теорема 5. Пусть оператор \mathcal{K} \mathcal{L} -свертки на полуоси ограничен. Тогда для фредгольмовости оператора $\zeta I + \mathcal{K}$ ($\zeta \in \mathbb{C}$) необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

$$1) \inf_{\lambda > 0} |\zeta + c(\lambda)| > 0,$$

2) для некоторого конечного подмножества $T' \subset T$ при каждом $\lambda \in T \setminus T'$ матрица $\zeta E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda$ обратима и

$$\sup_{\lambda \in T \setminus T'} \|(\zeta E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda)^{-1}\| < \infty.$$

При выполнении этих условий имеют место равенства

$$\dim(\ker(\zeta I + \mathcal{K})) = \sum_{\lambda \in T'} \dim(\ker(\zeta E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda)), \quad \text{ind}(\zeta I + \mathcal{K}) = 0.$$

и обобщенный обратный $(\zeta I + \mathcal{K})^{(-1)}$ определяется для $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ по формуле

$$((\zeta I + \mathcal{K})^{(-1)} g)(x) = \frac{1}{\zeta} g(x) - \int_0^\infty R(x, t; \zeta) g(t) dt, \quad x > 0,$$

где

$$R(x, t; \zeta) = \frac{1}{\zeta} \int_0^\infty \frac{c(\lambda)}{\zeta + c(\lambda)} u(x, \lambda) \overline{u(t, \lambda)} d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{j, k=1}^{r_\lambda} d_{j, k}(\lambda, \zeta) v_j(x, \lambda) \overline{v_k(t, \lambda)}.$$

$$(d_{j, k}(\lambda, \zeta))_{j, k=1}^{r_\lambda} = \frac{1}{\zeta} E_{r_\lambda} - (\zeta E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda)^{(-1)}.$$

¹ Институт математики НАН РА

² Ереванский государственный университет

А. Г. Камалян, академик А. Б. Нерсисян, И. Г. Хачатрян

Интегральные операторы \mathcal{L} -свертки на полуоси

Рассматриваются интегральные операторы на полуоси с ядрами, удовлетворяющими определенным дифференциальным уравнениям в частных производных. Исследуются ограниченность, фредгольмовость этих операторов, а также разрешимость соответствующих уравнений.

Ա. Ն. Քամալյան, ակադեմիկոս Ա. Բ. Ներսիսյան, Ի. Գ. Խաչատրյան

\mathcal{L} -փաթեթային ինտեգրալային օպերատորներ կիսաառանցքի վրա

Դիտարկվում են ինտեգրալ օպերատորներ, որոնց կորիզները բավարարում են որոշ դիֆերենցիալ հավասարումների: Ուսումնասիրվում են այդ օպերատորների սահմանափակությունը եւ ֆրեդհոլմությունը, ինչպես նաեւ համապատասխան հավասարումների լուծելիությունը:

A. G. Kamalyan, academician A. B. Nersessyan, I. G. Khachatryan

\mathcal{L} -Convolution Type Integral Operators on Half-Line

Integral operators on half-line with kernels satisfying certain partial differential equations are considered. Boundedness and fredholmness of the operators and solvability of the coresponding integral equations are investigated.

Литература

1. Нерсисян А.Б. - Изв. АН АрмССР. Математика. 1982. Т. 17. №6. С. 442-463.
2. Камалян А.Г., Хачатрян И.Г., Нерсисян А.Б. - Изв. НАН Армении. Математика. 1994. Т. 29. №6. С. 31-81.
3. Камалян А.Г., Нерсисян А.Б., Хачатрян И.Г. В кн.: Третье российско-армянское совещание по матем. физике, компл. анализу и смежным вопросам. Ереван. 2010. С. 74-79.
4. Наймарк М.А. - Линейные дифференциальные операторы. М. Наука. 1969.
5. Хачатрян И.Г. - Обратная задача рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков. Докт. дис. Ереван. 1986.
6. Gohberg I., Krupnik N. - One-dimensional linear singular integral operators Vol. 53, 54 of Operator Theory: Advances and Applications, Birkhauser Verlag. 1992.