ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 110 2010 № 4

МЕХАНИКА

УДК 531.8

Академик Г. Е. Багдасарян, З. Н. Даноян, Э. А. Даноян

Об определении численных значений констант магнитострикции

(Представлено 28/VI 2010)

Ключевые слова: *пьезомагнитная постоянная, магнитострикционная константа*

В литературе в основном приводятся значения динамических пьезомагнитных постоянных для магнитострикционных ферромагнитных материалов и ферритов. Однако часто бывает необходимо знать значения магнитострикционных констант для вышеуказанных материалов. В работе исходя из уравнений состояния магнитострикционной среды выводится эмпирическая формула для вычисления значений магнитострикционных констант.

1. Рассмотрим выражение для плотности свободной энергии F упругой макроскопически изотропной магнитострикционной среды. Это выражение имеет вид

$$F = U(S, \varepsilon_{ik}, B_j) - TS = F(T, \varepsilon_{ik}, B_j).$$

Все термодинамические величины относятся к единице объема среды до начала действия обобщенных сил, U — внутренняя энергия, T — абсолютная температура, S — энтропия, ε_{ik} — тензор деформации, $B_j = \mu_0(H_j + I_j)$ — магнитная индукция, H — напряженность магнитного поля, I — намагниченность, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная. Бесконечно малые обратимые изменения состояния системы можно характеризовать следующим изменением термодинамической функции:

$$dF = \sigma_{ik} d\varepsilon_{ik} + H_j dB_j - SdT. \tag{1.1}$$

Суммирование в (1.1) ведется по повторяющимся индексам. В качестве независимых переменных выбраны T, ε_{ik}, B_j. Более подробный анализ физических процессов, сопровождающих пьезомагнитные колебания, приводит к выводу о целесообразности использования в ряде случаев других независимых магнитных переменных. Действительно, именно изменение намагниченности является непосредственной причиной пьезомагнитной деформации в намагниченных ферромагнетиках и ферритах. Так как для рассматриваемых сред различие между B_j и $\mu_0 I_j$ несущественно (за исключением очень сильных полей, а также температур, лежащих выше точки Кюри), то получаем следующие дифференциальные соотношения, непосредственно вытекающие из (1.1):

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ik}}\right)_I, \quad H_j = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial F}{\partial I_j}\right)_\varepsilon, \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial I_j}\right)_\varepsilon = \mu_0 \left(\frac{\partial H_j}{\partial \varepsilon_{ik}}\right)_I = \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ik} \partial I_j} = h_{ijk}.$$

Индексы ε, I в (1.2) и (1.3), а также σ, H в последующих выражениях означают постоянство соответствующей термодинамической величины при дифференцировании. Кроме того, во всех случаях предполагается, что процесс протекает изотермически ($T = \mathrm{const}$) и термомагнитные эффекты не играют существенной роли [2].

Для количественного описания такой среды в рамках обратимой термодинамики необходимо иметь в явном виде зависимость F от ε_{ik} и I_j. Ее можно получить путем разложения F в степенной ряд по переменным ε_{ik} и I_j. Рассматриваемый ряд должен содержать упругую, магнитную и взаимную (магнитоупругую) части (соответственно F_y, F_M, F_{My}). Полагая $\sigma_{ik} = 0$, если $\varepsilon_{ik} = 0$ и $I_j = 0$, из формулы (1.2) можно сделать вывод, что F не содержит линейных относительно ε_{ik} членов.

С учетом магнитной симметрии можно показать, что F_M также не содержит линейных относительно I_j членов. Очевидно, что первые неисчезающие члены в F_{My} квадратичны по I_j, линейны по ε_{ik}. Таким образом, получаем [1,2]

$$\begin{aligned} F = F_0 + F_y + F_M + F_{My} = \\ = F(T,0,0) + \frac{1}{2}c^I_{ikfg}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{fg} + \ldots + \frac{1}{2}\mu_0\gamma^\varepsilon_{ij}(1+\gamma^\varepsilon_{ij})I_iI_j + \frac{1}{2}Q_{ikjl}\varepsilon_{ik}I_jI_l + \ldots \end{aligned} \tag{1.4}$$

В формуле (1.4) через c^I_{ikfg}, γ^ε_{ij}, Q_{ijkl} обозначены соответственно тензоры квазистатических модулей упругости, относительной магнитной невосприимчивости и магнитострикции, причем $\gamma^\varepsilon_{ij} \ll 1$.

Подстановка (1.4) в (1.2) дает изотермические уравнения состояния среды, обладающей магнитоупругими свойствами [1]:

$$\begin{cases} \sigma_{ik} = c^I_{ikfg}\varepsilon_{fg} + \frac{1}{2}Q_{ikjl}I_jI_l, \\ H_j = \gamma^I_{jl} + I_l + \frac{1}{\mu_0}Q_{ikjl}\varepsilon_{ik}I_l. \end{cases} \tag{1.5}$$

Если физические величины, фигурирующие в системе (1.5), можно представить в виде суммы постоянного и флуктуационного слагаемых, причем абсолютные значения флукгуационных слагаемых пренебрежительно малы по сравнению с абсолютными значениями соответствующих постоянных слагаемых, то можно получить систему уравнений состояния, описывающих поведение флуктуационных слагаемых

$$\begin{cases} \sigma'_{ik} = c^I_{ikfg}\varepsilon'_{fg} + h_{ikj}I'_j, \\ H'_j = (\gamma^\varepsilon_{jl} + \frac{1}{\mu_0}Q_{ikjl}\varepsilon^0_{ik})I'_l + \frac{1}{\mu_0}h_{ikj}\varepsilon'_{ik}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Здесь верхним индексом "$'$" помечены флуктуационные члены, а верхним индексом "0" — постоянные слагаемые, $h_{ikj} = Q_{ikjl}I^0$, $\mu_0^{-1}Q_{ikjl}\varepsilon^0_{ik}$ — поправка к величине γ^ε_{ij}, определяющая изменения магнитных свойств под действием постоянной деформации ε^0_{ik}. При анализе одномерного случая, который реализуется при продольных колебаниях тонких стержней, величины в системе (1.6) можно рассматривать как скалярные. В рамке принятых ограничений в одномерном случае вместе системы (1.6) получим

$$\begin{cases} \sigma' = E'\varepsilon' + hI', \\ H' = \mu_0^{-1}h\varepsilon' + (\aleph^\varepsilon)^{-1}I'. \end{cases}$$

Здесь E' — динамический модуль Юнга, $\aleph^\varepsilon$ — динамическая обратимая магнитная восприимчивость.

Другому выбору исходного термодинамического потенциала и независимых термодинамических переменных соответствует система

$$\begin{cases} \varepsilon' = (E^H)^{-1}\sigma' + dH', \\ I' = \mu_0^{-1}d\sigma' + \aleph^\sigma H'. \end{cases}$$

В дальнейшем наряду с переменными I и H мы будем использовать также переменные B и H. В последнем случае вместо пьезомагнитных постоянных h и d обычно вводятся пьезомагнитная постоянная a и постоянная чувствительности Λ:

$$a = (\frac{\sigma'}{B'})^\varepsilon = (\frac{H'}{\varepsilon'}) \approx \frac{h}{\mu_0},$$

$$\Lambda = (\frac{\varepsilon'}{H'}) = (\frac{B'}{\sigma'}) \approx d. \tag{1.7}$$

Имеет место полезная формула [2], связывающая пьезомагнитные постоянные a и d:

$$ad = \frac{k^2}{1-k^2}. \tag{1.8}$$

Здесь k — коэффициент магнитомеханической связи. В случае упруго возбуждаемого тороидального образца короткозамкнутой обмоткой ($I' = 0$) квадрат коэффициента магнитомеханической связи k^2 определяется как отношение плотности выходной магнитной энергии к плотности входной магнитной энергии. Из формулы (1.7) вытекает, что пьезомагнитные постоянные a и d, а также a и Λ имеют одинаковый знак.

Согласно формуле (1.4) магнитоупругая энергия определяется по формуле

$$F_{\text{му}} = \frac{1}{2} Q_{ijkl} \varepsilon_{ij} I_k I_l. \tag{1.9}$$

В случае гексагональной симметрии, когда координатная ось X_3 выбрана ориентированной вдоль оси шестого порядка, тензор магнитострикции Q_{ijkl} имеет следующие отличные от нуля независимые компоненты [3,4]:

$$Q_{1111} = Q_{2222}, Q_{3333}, Q_{1122} = Q_{2211}, Q_{1133} = Q_{2233},$$

$$Q_{3311} = Q_{3322}, Q_{2323} = Q_{2332} = Q_{3232} = Q_{1313} = Q_{1331} = Q_{3131},$$

$$Q_{1212} = Q_{1221} = Q_{2112} = Q_{2121} = \frac{(Q_{1111} - Q_{1122})}{2}.$$

Для изотропной магнитострикционной среды согласно [4] число независимых компонентов тензора магнитострикции равняется двум:

$$\begin{gathered} Q_{1111} = Q_{2222} = Q_{3333}, \\ Q_{1122} = Q_{2211} = \cdots = Q_{3311} = Q_{1133}, \\ Q_{1212} = Q_{1221} = \cdots = Q_{1313} = Q_{1331} = \frac{1}{2}(Q_{1111} - Q_{1122}). \end{gathered} \tag{1.10}$$

В работе [5] магнитоупругая энергия единицы объема определяется по формуле

$$F_{\text{му}} = \frac{1}{2} \mu_0 B_{ijkl} \varepsilon_{ij} I_k I_l. \tag{1.11}$$

Сравнивая формулы (1.9) и (1.11), легко получим

$$Q_{ijkl} = \mu_0 B_{ijkl}. \tag{1.12}$$

Из формул (1.10) и (1.12) вытекает, что

$$B_{ijkl} = e_2 \delta_{ij} + \frac{e_1 - e_2}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

где введены следующие обозначения:

$$e_1 = B_{1111}, \quad e_2 = B_{1122}, \tag{1.13}$$

а δ_{ij} — символ Кронекера.

2. В статье [1] для компонент тензора изотермических магнитострикционных постоянных приведены следующие выражения:

$$\begin{cases} h_{333} = Q^{*}_{1111} I_0 + \dfrac{1}{6} R^{*}_1 I_0^3 + \dfrac{1}{120} L_1^{0*} I_0^5, \\ h_{311} = Q^{*}_{1122} I_0 + \dfrac{1}{6} R^{*}_2 I_0^3 + \dfrac{1}{840} L_1^{0*} I_0^5 \end{cases} \tag{2.1}$$

и показано, что

$$h_{311} = -\frac{1}{2} h_{333}, \tag{2.2}$$

причем разница между значениями величин Q_{ijkl} и Q^{*}_{ijkl} может составлять менее процента [1]. Приближенно можно считать также, что

$$h_{311} \approx Q_{1122} I_j^0, \quad h_{333} \approx Q_{1111} I^0.$$

Используя (2.2), получаем

$$Q_{1122} = -\frac{Q_{1111}}{2}.$$

Отсюда с учетом (1.12) и (1.13) легко заметить, что имеет место следующее важное соотношение [6].

$$e_2 \approx -\frac{e_1}{2}.$$

Из формул (1.6) и (1.7) вытекает, что

$$a = \frac{h}{\mu_0} = \frac{Q_{1111} I^0}{\mu_0}.$$

В работе [2] приводится выражение пьезомагнитной постоянной для поликристаллического феррита

$$\mu_0 a(I^0, I') = 2Q_1 I^0 + 4R_1 (I^0)^3 + 3R_1 I^0 (I')^2, \quad sgn(\frac{Q_1}{R_1}) < 0, \tag{2.4}$$

где $Q_1 = Q_{1111}$, а R_1 с большой точностью совпадает с величиной R_1^{*}, фигурирующей в формуле (2.1). Представляет интерес рассмотрение зависимости пьезомагнитной постоянной a при небольших значениях B' от величины B^0. Из формулы (2.4) следует, что максимальное значение этой постоянной при $B' = \mu_0 I' \to 0$ определяется оптимальной индукцией поляризации B^0_* и равно $a^0_{\max}$:

$$B^0_* = \mu_0 \sqrt{\frac{(-Q_1)}{6R_1}}, \quad a^0_{\max} = \frac{4}{3\mu_0} Q_1 \sqrt{\frac{(-Q_1)}{6R_1}}$$

Отсюда легко получается, что

$$Q_1 = \frac{3}{4}\mu_0^2 \frac{a^0_{max}}{B^0_*}. \tag{2.5}$$

С другой стороны, для изотропных магнитострикционных материалов имеет место приближенная формула [2]

$$|a| \approx \frac{6}{5}|\lambda_s| \frac{B^0 E^B}{B_S^2},$$

где λ_S и B_S соответственно магнитострикция и индукция насыщения. Магнитострикция насыщения определяется формулой [8]

$$\lambda_S \approx \frac{2\lambda_{100} + 3\lambda_{111}}{5},$$

где λ_{100} и λ_{111} магнитострикции соответственно вдоль осей [100] и [111]. При слабой анизотропной магнитострикции можно считать $\lambda_S \approx \lambda_{111}$. Так как значение $a^0_{\max}$ соответствует значению B^0_*,

$$|a^0_{\max}| \approx \frac{6}{5}|\lambda_S| \frac{B^0_* E^B}{B_S^2}. \tag{2.6}$$

Подставляя значение (2.6) в формулу (2.5), окончательно получим

$$|Q_1| \approx \frac{9}{10}\mu_0^2 |\lambda_s| \frac{E^B}{B_S^2}. \tag{2.7}$$

Вышеизложенная теория скорее всего качественно, чем количественно объясняет поведение пьезомагнитных постоянных. Значения, полученные согласно формуле (2.7) приблизительно фиксированным числовым множителем, отличаются от соответствующих значений, полученных экспериментальным путем, и приведены в [2] для некоторых ферромагнитных материалов.

Используем формулу, предложенную Бозортом [7]:

$$\Lambda = \frac{3\lambda_{111}}{2K_1} B_S \left(\frac{B^0}{B_S}\right) \left(1 - \left(\frac{B^0}{B_S}\right)^2\right) f, \tag{2.8}$$

где f — коэффициент, приблизительно равный 1.5, K_1 — константа магнитной анизотропии.

Из формулы (2.8) вытекает, что

$$sgn(\Lambda) = sgn\left(\frac{\lambda_{111}}{K_1}\right),$$

т.е. знак Λ определяется знаком отношения $\dfrac{\lambda_{111}}{K_1}$.

Уже было отмечено, что константы a и Λ имеют одинаковый знак. В силу этого из (2.7) с учетом (1.12) и (1.13) легко получаются приближенные формулы

$$e_1 \approx 0.9c\mu_0|\lambda_S|\frac{E^B}{B_S^2}sgn(\frac{\lambda_{111}}{K_1}), \quad Q_1^{\text{эмп}} = \mu_0 \cdot e_1, \tag{2.9}$$

где c — числовой коэффициент, приблизительно равный отношению экспериментального и теоретического значений магнитострикционной константы (сравнительный анализ с данными, приведенными в [2], показывает, что $c \approx 1.8$). Статический модуль Юнга для ферритов Ф-86, Ф-107 и, по-видимому, других аналогичных материалов на 15-18% меньше, чем динамический [2], в связи с чем нами принято приближенно $E^B \approx 1.115E$.

Значения магнитострикционных констант e_1 и e_2, которые для некоторых ферромагнитных материалов и ферритов приведены в табл. 1, получаются с помощью формул (2.9) и (2.3).

Таблица 1

Наименование или марка материала	B_S, T	$\lambda_S \cdot 10^6$	Модуль Юнга $E \cdot 10^{-11}$Н/м^2	$sgn(\frac{\lambda_{11}}{K_1})$	e_1	e_2
Никель НП-2Т	0.61[2]	-32[2]	2.1[6]	+	42	-21
Ферроскуб 7А1	0.33[6]	-28[2]	1.7[6]	+	102	-51
Ферроникель $NiFe_2O_4$	0.34[2]	-26[2]	1.5[6]	+	79	-39.5
Феррит Ф-107	0.38[6]	-27[2]	1.7[6]	+	75	-37.5
Феррит Ф-86	0.35[2]	-24[2]	1.7[6]	+	78	-39
Кобальт	1.79[2]	-60[2]	2.1	-	-9	4.5
13AlFe(алфер)	1.3[2]	40[2]	1.5[6]	+	7	-3.5
Пермендюр	2.45[2]	-70[2]	-	-	-5	2.5
Железо	2[2]	-7[2]	2.1	-	-1	0.5
Феррограната$Y_3Fe_5O_4$	0.175[9]	-3[9]	2.08[9]	+	48	-24

При расчете для пермендюра, модуль Юнга которого нам неизвестен, приближенно принято $E = 2 \cdot 10^{11}$.

Таблица 2

Наименование или марка материала	$Q_1^{\text{эксп}} \cdot 10^7$	$Q_1^{\text{эмп}} \cdot 10^7$	Относительная погрешность, %
Феррит Ф-86	930[2]	985	5.97
Ферроникель $NiFe_2O_4$	900[2]	992	10
Никель НП-2Т	490[2]	530	8.42

В табл. 2 для сравнения одновременно с экспериментальными значениями магнитострикционной константы Q_1 для некоторых материалов [2] приведены также значения той же константы, вычисленные согласно формуле (2.9).

Из этой таблицы видно, что относительная погрешность не превосходит 10 процентов.

Институт механики НАН РА

Академик Г. Е. Багдасарян, З. Н. Даноян, Э. А. Даноян

Об определении численных значений констант магнитострикции

В литературе в основном приводятся значения динамических пьезомагнитных постоянных для магнитострикционных ферромагнитных материалов и ферритов. Однако часто бывает необходимо знать значения магнитострикционных констант для вышеуказанных материалов. Исходя из уравнений состояния магнитострикционной среды выводится эмпирическая формула для вычисления значений магнитострикционных констант.

Ակադեմիկոս Գ. Ե. Բաղդասարյան, Զ. Ն. Դանոյան, Է. Հ. Դանոյան

Մագնիսաստրիկցիայի հաստատունների թվային արժեքների որոշումը

Գրականության մեջ հիմնականում բերված են դինամիկ պյեզոմագնիսական հաստատունների արժեքները ֆերոմագնիսական մագնիսաստրիկցիոն նյութերի և ֆերիտների համար: Սակայն հաճախ անհրաժեշտ է լինում իմանալ վերոհիշյալ նյութերի համար մագնիսաստրիկցիոն հաստատունների արժեքները: Մագնիսաստրիկցիոն միջավայրի վիճակի հավասարումների հիման վրա ստացվել է էմպիրիկ բանաձև մագնիսաստրիկցիայի հաստատունների արժեքը հաշվելու համար:

Academician G. E. Bagdasaryan, Z. N. Danoyan, E. H. Danoyan

On Determination of Numerical Values of Magnetostrictive Constants

In the literature, the values of dynamic piezomagnetic constants mainly brought for magnetostrictive ferromagnetic materials and ferrits. However, in some cases it is necessary to know the values of magnetostrictive constants for above-mentioned materials.

In the presented work the emphiric formula is obtained to calculate the magnetostrictive constants based on the state equations of magnetostrictive media.

Литература

1. *Власов К.Б.* - Изв. АН СССР. Сер.физ. 1957. Т. 21. С. 1140-1148.
2. *Сыркин Л.Н.* Пьезомагнитная керамика. Изд. 2-е, переработанное и дополненное. Л. Энергия. 1980. 205 с.
3. *Власов К.Б.* - Журн. экспериментальной и теоретической физики. 1960. Т. 38. Вып. 3. С. 889-894.
4. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. Изд. 2-е, переработанное. М. Наука. 1979. 639 с.
5. *Pao Y-H.,Yen C.-S.* - Int. J. Eng. Sci. 1973. V. 11. N4. P. 415-436.
6. *Багдасарян Г.Е.* Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван. Тигран Мец. 1999. 437 с.
7. *Бозорт Р.* Ферромагнетизм. М. ИЛ. 1956.
8. *Белов К.П.* Магнитострикционные явления и их технические приложения. М. Наука. 1987.160 с.
9. *Яковлев Ю.М., Генделев С.Ш.* Монокристаллы ферритов в радиоэлектронике. М. Советское радио. 1975. 360 с.