ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

110 2010 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Р. М. Киракосян, С. П. Степанян

Задача устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса и поперечного сдвига

(Представлено академиком Г.Е. Багдасаряном 9/IV 2010)

Ключевые слова: *пластинка-полоса, собственный вес, поперечный сдвиг, устойчивость, колонна*

В рамках уточненной теории С.А. Амбарцумяна, учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов [1], рассматривается задача устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса постоянной интенсивности. Задача решается методом коллокаций, для двух вариантов краевых условий – шарнирного опирания и защемления обоих краев пластинки-полосы. Приводятся безразмерные критические значения нагрузок, на основе которых строятся графики их зависимости. Делаются количественные и качественные заключения. Из-за безразмерности полученные результаты применимы и к колоннам.

В класической постановке (без учета поперечного сдвига) решение рассматриваемых задач можно найти в [2].

1. Рассмотрим пластинку-полосу постоянной толщины h и ширины l. Начало координат поместим на одной кромке. Ось $0x$ направим по ширине пластинки-полосы, а ось $0z$ – перпендикулярно ей. Материал ортотропен и главные направления анизотропии параллельны координатным осям.

Пусть вдоль края $x = 0$ приложены равномерно распределенные силы P, а вдоль оси $0x$ действует собственный вес постоянной интенсивности q.

Для простоты положим

$$P = kql, \tag{1.1}$$

где параметр k может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Представление (1.1) позволяет в качестве искомой величины

считать критическое значение одного из параметров k или q, между которыми существует определенная зависимость. Очевидно, при $k = 0$ внешние силы P отсутствуют и потеря устойчивости происходит лишь из-за собственного веса. При $k \to \infty$ критическое значение $q_{kp} \to 0$, а их произведение стремится к конечной величине P_{kp}. В этом случае влиянием собственного веса пренебрегается.

В рамках уточненной теории [1] имеем

$$T_x = -q(kl + x),\ N_x = \frac{h^3}{12}\varphi,\ \tilde{Z} = -q(kl + x)\frac{d^2w}{dx^2},$$

$$M_x = -\frac{B_{11}h^3}{12}\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{h^5}{120}\chi\frac{d\varphi}{dx}, \tag{1.2}$$

$$\chi = \frac{B_{11}}{B_{55}},\ u_x = -z\frac{dw}{dx} + \frac{zh^2}{24B_{55}}\left(3 - 4\frac{z^2}{h^2}\right)\varphi.$$

Здесь T_x — продольное усилие, N_x и M_x — перерезывающая сила и изгибающий момент, $\tilde{Z}$ — нормальная составляющая фиктивной нагрузки, φ — функция, характеризующая распределение касательного напряжения τ_{xz}. u_x — перемещение по оси x, вызванное вследствие потери устойчивости, B_{ij} — параметры материала пластинки-полосы, w — прогиб.

После выпучивания состояние пластинки-полосы описывается уравнениями [1]

$$\frac{dN_x}{dx} = -\tilde{Z},\ \frac{dM_x}{dx} = N_x. \tag{1.3}$$

С учетом (1.2) уравнения (1.3) приводятся к системе относительно w и φ

$$\frac{d\varphi}{dx} - \frac{12q}{h^3}(kl + x)\frac{d^2w}{dx^2} = 0,\ \varphi - \frac{\chi h^2}{10}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + B_{11}\frac{d^3w}{dx^3} = 0. \tag{1.4}$$

Примем обезразмеривающие обозначения:

$$u_x = h\bar{u}_x, w = h\bar{w},\ x = l\bar{x},\ \frac{h}{l} = S,\ \frac{\chi S^2}{10} = \alpha,\ q = \frac{B_{11}\bar{q}S^3}{12}$$

$$T_x = B_{11}h\bar{T}_x,\ N_x = B_{11}h\bar{N}_x,\ M_x = B_{11}h^2\bar{M}_x,\ P = \frac{B_{11}\bar{P}S^3l}{12},\ \bar{P} = k\bar{q}. \tag{1.5}$$

Дифференцируя второе уравнение системы (1.4) и имея в виду первое уравнение этой системы, приходим к следующему разрешающему дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно безразмерного прогиба $\bar{w}$:

$$[1 - \alpha\bar{q}(k + \bar{x})]\frac{d^4\bar{w}}{d\bar{x}^4} - 2\alpha\bar{q}\frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3} + \bar{q}(k + \bar{x})\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} = 0. \tag{1.6}$$

К этому уравнению следует присоединить соответствующие краевые условия.

2. Рассмотрим случай, когда оба края пластинки-полосы шарнирно оперты. Имея в виду первое уравнение системы (1.4), с учетом обозначений (1.5) для безразмерного изгибающего момента получим выражение

$$\overline{M}_x = -\frac{S^2}{12}[1 - \alpha\bar{q}(k + \overline{x})]\frac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2}. \tag{2.1}$$

Следовательно, условия шарнирного опирания краев $\overline{x} = 0$ и $\overline{x} = 1$ будут:

$$\overline{w} = 0, \quad \frac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2} = 0 \quad \left(M_x \left| \begin{array}{l} \\ x = 0 \\ x = l \end{array} \right. = 0 \right). \tag{2.2}$$

Безразмерный прогиб представим в виде

$$\overline{w} = a_1\overline{x} + \sum_{i=3}^{n} a_i\overline{x}^i, \tag{2.3}$$

при котором краевые условия края $\overline{x} = 0$ удовлетворяются автоматически.

Здесь a_1 и a_i — неизвестные коэффициенты. Необходимо составить систему $n-1$ однородных уравнений и определить критическую интенсивность $\bar{q}_{kp}$ из условия существования нетривиального решения этой системы. При этом два уравнения получатся из условий края $\overline{x} = 1$, а остальные — из разрешающего уравнения (1.6), записанного в $n-3$ внутренних точках интервала $0-1$. Для этого необходимо пластинку-полосу разделить на $n-2$ части.

Вычисления удобно проводить для конкретных значений χ и k. Очевидно, для разных чисел n получатся различные значения $\bar{q}_{kp}$. Вычисления следует повторять до наступления практической сходимости по n.

3. Пусть оба края пластинки-полосы защемлены. При потере устойчивости для безразмерного продольного перемещения с учетом (1.5) имеем

$$\overline{u}_z = -\frac{z}{l}\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}} + \frac{zh}{24B_{55}}\left(3 - 4\frac{z^2}{h^2}\right)\varphi. \tag{3.1}$$

Интегрировав первое уравнение системы (1.4), получим

$$\varphi = C + \frac{B_{11}h}{l^3}\bar{q}\left[(k + \overline{x})\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}} - \overline{w}\right]. \tag{3.2}$$

Здесь C — постоянная интегрирования. Ее значение можно определить из условий начального состояния пластинки-полосы, когда она еще не потеряла устойчивость. Тогда

$$\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}} \equiv \overline{w} \equiv 0. \tag{3.3}$$

И поскольку в плоском состоянии перерезывающая сила отсутствует, то

$$N_x^0 = \frac{Ch^3}{12} = 0 \Rightarrow C = 0. \tag{3.4}$$

Имея в виду это обстоятельство, из (3.1) получим

$$\overline{u}_x = -\frac{z}{l}\left\{\left[1 - \frac{5\alpha\overline{q}}{12}\left(3 - 4\frac{z^2}{h^2}\right)(k + \overline{x})\right]\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}} + \frac{5\alpha\overline{q}}{12}\left(3 - 4\frac{z^2}{h^2}\right)\overline{w}\right\}. \tag{3.5}$$

В сечении защемления $\overline{w} = 0$, в силу чего при $\overline{x} = 0$ и $\overline{x} = 1$ условия защемления будут

$$\overline{w} = 0, \quad \frac{d\overline{w}}{d\overline{x}} = 0. \tag{3.6}$$

Таким образом, по теории [1] в отличие от обычной задачи изгиба в задаче устойчивости пластинки-полосы условиям защемления удается удовлетворить во всех точках сечения (для всех z).

Безразмерный прогиб удобно представить в виде

$$\overline{w} = \sum_{i=2}^{n} a_i \overline{x}^i, \tag{3.7}$$

где условия защемления края $\overline{x} = 0$ удовлетворяются автоматически Вычисления следует проводить подобно случаю, когда оба края пластинки-полосы были шарнирно оперты.

Не вдаваясь в подробности, отметим, что как разрешающее уравнение (1.6), так и краевые условия совпадают с разрешающим уравнением и краевыми условиями, соответствующими сдвиговой теории первого порядка Рейснера [3], с поправочным коэффициентом 5/6.

Аналогичным способом рассмотренную задачу можно решить и в случае переменной интенсивности собственного веса (или объемной силы другого характера).

В табл 1 представлены критические значения интенсивности собственного веса $\overline{q}$ при некоторых значениях k, χ и n. Сходимость процесса вычислений практически достигается при $n = 12$. Наибольшая разница между значениями $\overline{q}$, а следовательно и $\overline{P} = k\overline{q}$, соответствующими числам $n = 11$ и $n = 12$, составляет примерно 1,27%. Как и следовало ожидать, с возрастанием параметра χ (с уменьшением относительного модуля поперечного сдвига материала) критическое значение $\overline{q}$ убывает.

В табл. 2 приведены значения относительной поправки

$$\Delta = \frac{\overline{q}_{кл.} - \overline{q}}{\overline{q}_{кл.}} 100\%, \tag{3.8}$$

вносимой учетом поперечного сдвига. При одинаковых условиях поправка к классическому значению $\overline{q}_{кл}$ в случае защемления обоих краев пластинки-полосы примерно в три раза больше, чем в случае их шарнирного опирания.

Причем с возрастанием доли сосредоточенной силы (с возрастанием параметра k) влияние поперечного сдвига для двух случаев краевых условий немного уменьшается.

Таблица 1

k	χ / n	Шарнир-шарнир				Защемление-защемление			
		0	2	3	5	0	2	3	5
	0	10	18.95	17.14	16.65	15.38	79.99	56.21	48.59	37.77
		11	18.95	17.36	16.65	15.38	80.20	56.19	48.53	37.70
		12	18.96	17.36	16.65	15.38	80.27	56.23	48.51	37.67
	0.5	10	9.765	9.020	8.688	8.089	39.60	29.47	26.05	21.06
		11	9.765	9.021	8.688	8.089	39.62	29.48	26.06	21.06
		12	9.765	9.021	8.688	8.089	39.62	29.49	26.06	21.05
	1	10	6.548	6.060	5.842	5.448	26.36	19.84	17.63	14.39
		11	6.548	6.060	5.842	5.448	26.36	19.84	17.64	14.39
		12	6.548	6.060	5.842	5.448	26.36	19.85	17.64	14.40
	3	10	2.817	2.610	2.518	2.351	11.28	8.560	7.636	6.277
		11	2.817	2.610	2.518	2.351	11.28	8.560	7.636	6.277
		12	2.817	2.610	2.518	2.351	11.28	8.560	7.637	6.276
	5	10	1.794	1.662	1.604	1.498	7.179	5.452	4.866	4.004
		11	1.794	1.662	1.604	1.498	7.179	5.452	4.866	4.004
		12	1.794	1.662	1.604	1.498	7.179	5.452	4.866	4.004
	10	10	0.9398	0.8710	0.8403	0.7850	3.761	2.857	2.551	2.100
		11	0.9399	0.8711	0.8403	0.7849	3.760	2.857	2.551	2.100
		12	0.9399	0.8711	0.8403	0.7849	3.760	2.857	2.551	2.101
	100	10	0.0982	0.0910	0.0880	0.0820	0.3930	0.2985	0.2665	0.2195
		11	0.0982	0.0910	0.0878	0.0820	0.3929	0.2986	0.2666	0.2195
		12	0.0982	0.0910	0.0878	0.0820	0.3928	0.2986	0.2666	0.2195

Таблица 2

χ \ k	0	0.5	1	3	5	10	100
Ш-Ш	2	8.44	7.62	7.45	7.35	7.35	7.32	7.32
	3	12.2	11.03	10.8	10.6	10.6	10.6	10.6
	5	18.9	17.2	16.8	16.5	16.5	16.5	16.5
З-З	2	29.9	25.6	24.7	24.1	24.1	24.0	24.0
	3	39.6	34.2	33.1	32.3	32.2	32.1	32.1
	5	53.1	46.9	45.4	44.4	44.2	44.1	44.1

Таблица 3

$\bar{q}_3/\bar{q}_ш = \bar{P}_3/\bar{P}_ш$	k	χ			
		0	2	3	5
	0	4.23	3.24	2.91	2.45
	0.5	4.06	3.27	3.00	2.60
	1	4.03	3.27	3.02	2.64
	3	4.00	3.28	3.03	2.67
	5	4.00	3.28	3.03	2.67
	10	4.00	3.28	3.03	2.68
	100	4.00	3.28	3.04	2.68

На рис. 1 и 2 приведены графики зависимости $\bar{P} \sim \bar{q}$ для случаев шарнирного опирания и защемления обоих краев пластинки-полосы при двух значениях параметра χ.

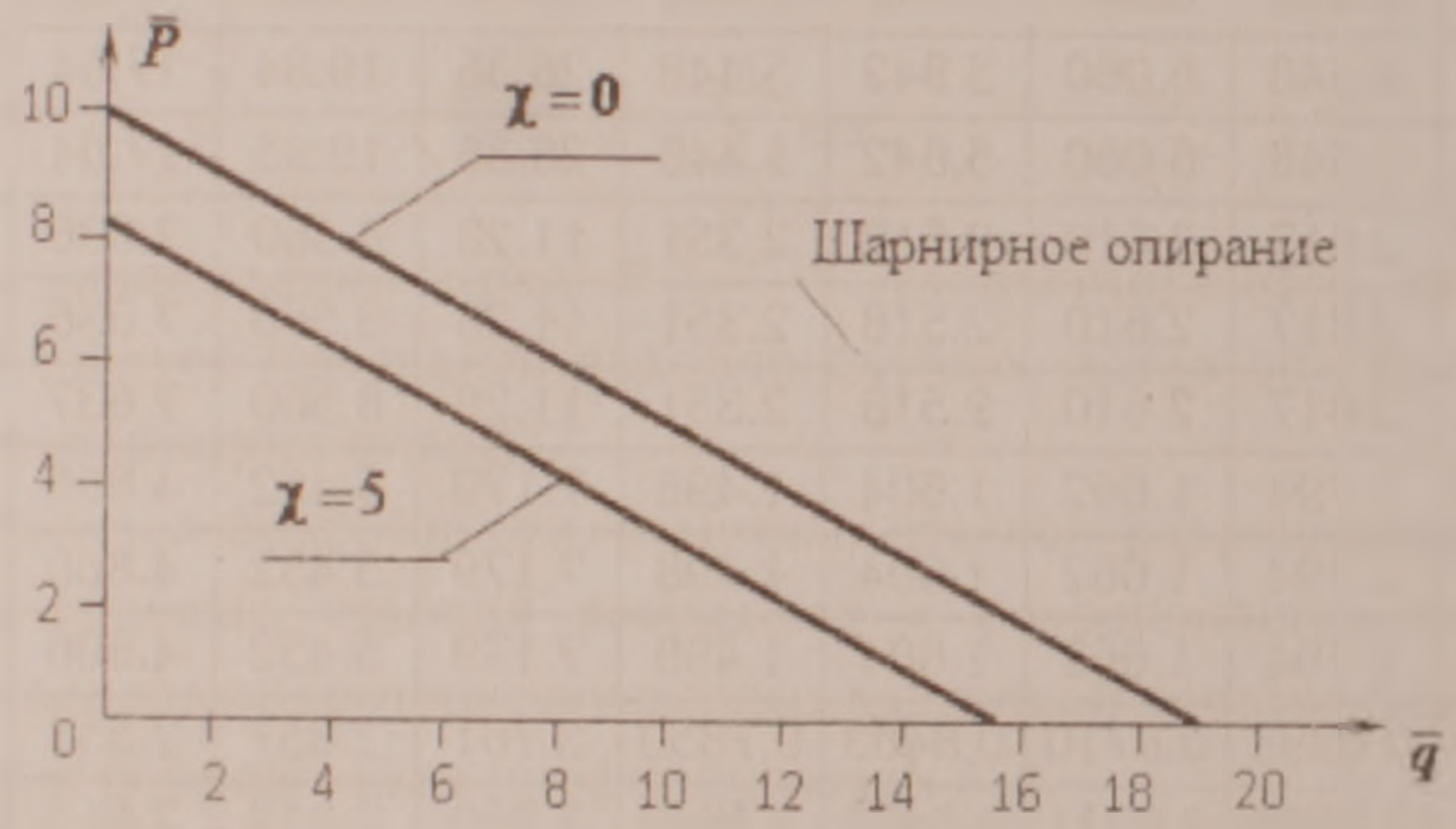

Рис. 1. $\bar{P} = 9,87 - 0,52\bar{q}$, $(\chi = 0)$; $\bar{P} = 8,21 - 0,53\bar{q}$, $(\chi = 5)$

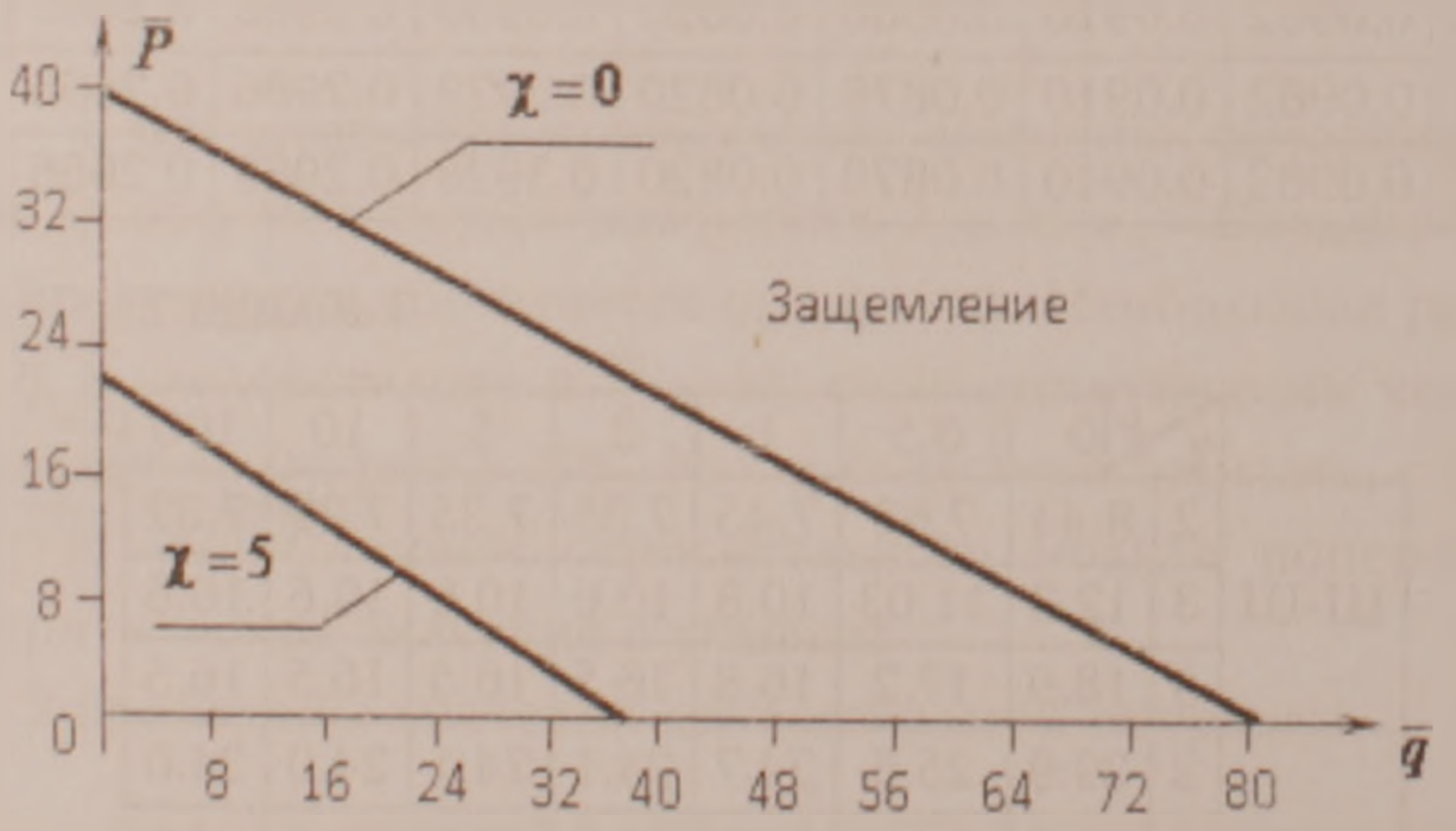

Рис. 2. $\bar{P} = 39,28 - 0,49\bar{q}$, $(\chi = 0)$; $\bar{P} = 21,95 - 0,58\bar{q}$, $(\chi = 5)$

На основе табл. 1 составлена табл. 3, данные которой приводят к следующим заключениям:

1. В классической постановке ($\chi = 0$), при действии только собственного веса ($k = 0$), критическое значение $\bar{q}$ при защемлении обоих краев пластинки-полосы по сравнению со случаем шарнирного опирания больше не в 4, а в 4,23 раза ($\bar{q}_3/\bar{q}_{\text{ш}} = 4.23$). С увеличением доли сосредоточенной силы (с возрастанием k) это отношение убывает и при $k \to \infty$, когда влиянием собственного веса пренебрегается, оно, как и следовало ожидать, стремится к 4.

2. С возрастанием χ отношение $\bar{q}_3/\bar{q}_{\text{ш}}$ для всех k убывает. Следовательно, с уменьшением относительного модуля поперечного сдвига материала влияние защемления краев пластинки-полосы ослабевает. Это и естественно.

3. При отличном от нуля значении χ с возрастанием k (с увеличением доли сосредоточенной силы) это отношение немного возрастает.

В заключение отметим, что полученные результаты при $\chi = 0$ и $k = 0$, т.е. в классическом случае, когда влияние поперечного сдвига не учитывается и действует только собственный вес, практически совпадают с соответсвующими результатами [2].

Рассмотренные задачи можно приближенно решать по методу Бубнова – Галеркина [2]. В случае шарнирного опирания краев пластинки-полосы кинематически возможные прогибы $w = \sin \pi x$ для критических значений $\bar{q}$ приводят к формуле

$$\bar{q} = \frac{2\pi^2}{(1 + 2k)(1 + \alpha\pi^2)}. \tag{3.9}$$

В случае же защемления при $w = \sin^2 \pi x$

$$\bar{q} = \frac{8\pi^2}{(1 + 2k)(1 + 4\alpha\pi^2)}. \tag{3.10}$$

При принебрежении собственным весом и влиянием поперечного сдвига имеем $\chi = 0$, $k \to \infty$, $\bar{q} \to 0$ и $\bar{P} = k\bar{q}$ стремится к точному значению – в случае шарнирного опирания к π^2, в случае защемления – к $4\pi^2$.

В случае действия только собственного веса, когда учитывается влияние поперечного сдвига, эти формулы приводят к ощутимым погрешностям. Например, при $k = 0$, $\chi = 5$ погрешности формул (3.9) и (3.10) составляют 7.2% и 17.1% соответственно. Для улучшения результатов метода Бубнова – Галеркина следует использовать многочленные выражения кинематически возможных прогибов, что связано с серьезными осложнениями.

Институт механики НАН РА

Р. М. Киракосян, С. П. Степанян

Задача устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса и поперечного сдвига

В рамках теории С.А. Амбарцумяна рассматривается задача устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса постоянной интенсивности и деформации поперечного сдвига. Задача решается для двух вариантов краевых условий – шарнирного опирания и защемления обоих краев пластинки-полосы. Приводятся безразмерные критические значения нагрузок, на основе которых строятся графики их зависимости. Из-за безразмерности полученные результаты применимы и к колоннам.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան, Ս. Պ. Սրեփանյան

Օրթոտրոպ սալ-շերտի կայունության խնդիրը՝ սեփական կշռի եւ ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ

Ս.Ա. Համբարձումյանի տեսության շրջանակներում դիտարկվում է օրթոտրոպ սալ-շերտի կայունության խնդիրը՝ սեփական կշռի եւ ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ: Խնդիրը լուծվում է եզրային պայմանների երկու տարբերյակների դեպքում, երբ սալ-շերտի երկու եզրերը հոդակապորեն հենված են, եւ երբ դրանք կոշտ ամրակցված են: Բերվում են բեռների կրիտիկական անչափ արժեքները, եւ կառուցվում են նրանց միջեւ եղած կախվածության գրաֆիկները:

R. M. Kirakosyan, S. P. Stepanyan

The Problem of Stability Orthotropic Plate-Layer, Taking into Account its Own Weight and Transverse Shear

On the basis of the theory of S.A. Ambarzumyan it is considered the problem of stability of orthotropic plate-layer, taking into account its own weight of constant intensity and shear deformations. The problem is solved for two variants of boundary conditions, for hinged support and clamping both edges of the plate-layer. The critical values of dimensionless loads are brought on the basis of which the graphs of their dependence are built. Because of the dimensionality, the results are applicable to the columns, too.

Литература

1. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.

2. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. М. Гос. изд. ф.-м. лит. 1963. 879 с.

3. *Reissner E.* - Trans ASME. 1945. V. 67. P. A69-A77.