

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 519.3

Э. Х. Григорян<sup>1</sup>, К. Л. Агаян<sup>2</sup>

О новом методе определения асимптотических формул в задачах  
дифракции волн

(Представлено академиком Г.Е. Багдасаряном 11/XII 2009)

**Ключевые слова:** *волновое поле, дифракция, функциональное уравнение, факторизация, асимптотика*

Строгие аналитические методы решения краевых задач занимают особое место в математической физике. Метод факторизации успешно используется для нахождения точных решений многочисленных важных и интересных задач электродинамики, акустики и теории упругих волн. Решения этих задач зачастую выражаются интегралами типа Фурье, которые за исключением немногих частных случаев в конечном виде не вычисляются. Однако волновое поле в дальней зоне, которое, как правило, и представляет наибольший интерес, особенно в задачах дифракции со связанными полями, можно выразить в более простом виде, если применить для приближенного вычисления этих интегралов асимптотические методы.

В предлагаемой работе на примере решения задачи о дифракции сдвиговой плоской волны на краю полубесконечной трещины в упругой плоскости демонстрируется новый подход к определению этих асимптотических формул. В отличие от хорошо известных традиционных методов решения подобных задач [1-3] здесь решение задачи сводится к краевой задаче типа Римана на действительной оси [5-10]. Для исследования полученного в виде интеграла Фурье решения разрезы в комплексной плоскости проводятся по координатным осям, и в итоге решение задачи представляется при помощи регулярных интегралов на разрезах.

Далее асимптотические формулы, в обход общепринятого метода перевала [1-4], определяются интегрированием по частям интегралов, представляющих волновое поле.

1. Рассмотрим упругую плоскость, содержащую полубесконечную трещину по отрицательной полуоси  $Ox$  декартовой системы координат  $Oxy$ .

Исследуем распределение волнового поля, предполагая, что из бесконечности падает сдвиговая плоская волна

$$u_z^{(\infty)}(x, y, t) = w_\infty(x, y)e^{-i\omega t} = e^{-ik(x \cos \beta + y \sin \beta + ct)}, \quad (1.1)$$

где  $w_\infty(x, y)$  — амплитуда,  $\beta (0 < \beta < \pi/2)$  — угол скольжения падающей упругой волны с осью  $Ox$ ,  $k$  — волновое число,  $c = \omega/k = \sqrt{\mu/\rho}$  — скорость распространения сдвиговых упругих волн,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\rho$  — плотность среды,  $\omega$  — частота колебаний,  $t$  — время.

Представляя единственное, отличное от нуля, упругое перемещение в виде

$$u_z(x, y, t) = w(x, y)e^{-i\omega t}, \quad (1.2)$$

решение задачи при помощи действительного преобразования Фурье можно свести к следующему функциональному уравнению (краевая задача типа Римана) на действительной оси:

$$\mu^{-1}\bar{\Phi}_+(\sigma) + \gamma(\sigma)\bar{\psi}_-(\sigma) = -2\pi ik \sin \beta \cdot \delta(\sigma - k \cos \beta), \quad (1.3)$$

$$\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\sigma x} dx, \quad \gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2}, \quad (1.4)$$

где  $\delta(x)$  — известная функция Дирака,  $\bar{\Phi}_+(\sigma)$  и  $\bar{\psi}_-(\sigma)$  — трансформанты Фурье неизвестных функций  $\Phi_+(x)$  и  $\psi_-(x)$ , которые связаны с амплитудой  $w(x, y)$  зависимостями

$$\begin{aligned} w(x, +0) - w(x, -0) &= 2\psi_-(x), & -\infty < x < \infty, \\ \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=+0} &= \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=-0} = \mu^{-1}\phi_+(x), & -\infty < x < \infty, \end{aligned} \quad (1.5)$$

представляющими граничные и контактные условия на линии  $y = 0$ . При этом  $\phi_+(x) = 0$  при  $x < 0$  и  $\psi_-(x) = 0$  при  $x > 0$ .

Функция из (1.4)  $\sqrt{\sigma^2 - k^2} > 0$  при  $|\sigma| > k$  и  $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$ , т.е. действительная ось, обходит точки ветвления функции  $\sqrt{\alpha^2 - k^2}$   $\sigma = -k$  сверху, а  $\sigma = k$  снизу, тем самым обеспечивая условие уходящей волны [1].

Решение функционального уравнения (1.3) при помощи известного представления

$$2\pi i \delta(\sigma - k \cos \beta) = \frac{1}{\sigma - k \cos \beta - i0} - \frac{1}{\sigma - k \cos \beta + i0} \quad (1.6)$$

дается в следующем виде:

$$\bar{\Psi}_-(\sigma) = -\frac{D}{\sqrt{\sigma - k}(\sigma - k \cos \beta - i0)}; \quad D = \sqrt{2k} \sin \beta/2, \quad (1.7)$$

а решение задачи — в виде

$$w(x, y) = \mp \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma|y|} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma - k}(\sigma - k \cos \beta - i0)} + w_{\infty}(x, y), \quad (1.8)$$

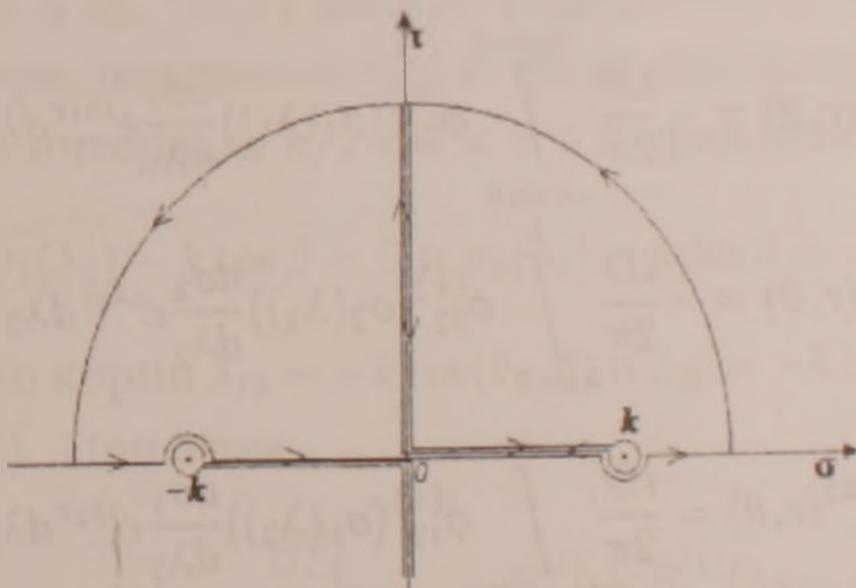
где  $w_{\infty}(x, y)$  дается формулой (1.1).

Имея в виду (1.6), решение (1.8) можно представить еще и в виде

$$w(x, y) = \mp \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma + k} e^{-\gamma|y|} e^{-i\sigma x}}{\gamma(\sigma - k \cos \beta + i0)} d\sigma \pm e^{-ikx \cos \beta + ik|y| \sin \beta} + w_{\infty}(x, y). \quad (1.9)$$

Отметим, что в формулах (1.8) и (1.9) для  $y \geq 0$  следует брать верхние знаки, а для  $y \leq 0$  — нижние.

2. Перейдем к исследованию распределения волнового поля упругих перемещений. Для детального исследования интегральных составляющих, входящих в (1.8) и (1.9), переходим в комплексную плоскость, разрезанную указанным на рисунке образом, и преобразуем интегралы при помощи контурного интегрирования. В связи с особенностями аналитического продолжения подынтегральных функций в комплексную плоскость и последующего использования леммы Жордана очевидно, что при  $x < 0$  контур интегрирования следует замкнуть в верхней полуплоскости и пользоваться формулой (1.9), а при  $x > 0$  — в нижней полуплоскости и использовать формулу (1.8).



Рассмотрим сначала область  $\Omega_{21}(x < 0, y \geq 0)$ . Тогда из (1.9) получим

$$w(x, y) = -\frac{D}{2\pi} \int_0^{\infty} \phi_1(\tau) [e^{-i\sqrt{k^2 + \tau^2} y} + e^{i\sqrt{k^2 + \tau^2} y}] e^{-\tau|x|} d\tau - \\ - \frac{iD}{2\pi} \int_0^k \frac{e^{-i\sqrt{k^2 - \sigma^2} y} + e^{i\sqrt{k^2 - \sigma^2} y}}{\gamma(\sigma - k \cos \beta + i0)} e^{-i\sigma x} d\sigma + w_{\infty}(x, y) + w_{отр}(x, y), \quad (2.1)$$

$$\phi_1(\tau) = e^{i\varphi_1/2}(\sqrt{k^2 + \tau^2}(i\tau - k \cos \beta)), \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \tau/k, \quad w_{\text{отр}}(x, y) = e^{-ikx \cos \beta +iky \sin \beta} \quad (2.2)$$

Здесь  $w_{\text{отр}}(x, y)$  – амплитуда упругой волны, отраженной от свободной поверхности трещины.

Следует отметить, что в связи с наличием в интеграле с бесконечным пределом (2.1) экспоненциально убывающего множителя, с вычислительной точки зрения формула (2.1) более удобна для анализа ближнего поля, чем исходный интеграл (1.9) по вещественной оси [4].

Для определения дальнего поля в выражении (2.1) переходим к полярным координатам

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \pi/2 < \theta < \pi \quad (2.3)$$

и делаем замену переменных интегрирования [5-10]:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\sigma) &= \sigma |\cos \theta| - \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta; \\ \lambda_2(\sigma) &= \sigma |\cos \theta| + \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тогда, имея в виду, что  $\lambda_2'(\sigma) > 0$  при  $0 < \sigma < k|\cos \theta|$ ,  $\lambda_2'(\sigma) < 0$  при  $k|\cos \theta| < \sigma < k$ , а  $\lambda_1'(\sigma) > 0$  при  $0 < \sigma < k$ , перемещение  $w(x, y)$  в области  $\Omega_{21}(x < 0, y \geq 0)$  можно представить в следующем виде:

А) при  $\pi - \beta < \theta < \pi$  ( $\cos(\pi - \theta) > \cos \beta$ )

$$w(r, \theta) = \sum_{j=1}^3 Q_j(r, \theta) + Q_4^{(+)}(r, \theta) + w_{\text{отр}}(r, \theta) + w_{\infty}(r, \theta), \quad (2.5)$$

$$Q_1(r, \theta) = -\frac{D}{2\pi} \int_0^{\infty} \phi_1(\tau) [e^{-r\lambda_1} + e^{-r\lambda_2}] d\tau,$$

$$Q_2(r, \theta) = -\frac{iD}{2\pi} \int_{-k \sin \theta}^{k|\cos \theta|} \phi_{22}^{(+)}(\sigma_1(\lambda_1)) \frac{d\sigma_1}{d\lambda_1} e^{i\lambda_1 r} d\lambda_1. \quad (2.6)$$

$$Q_3(r, \theta) = -\frac{iD}{2\pi} \int_{k \sin \theta}^k \phi_{22}^{(+)}(\sigma_2(\lambda_2)) \frac{d\sigma_2}{d\lambda_2} e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2,$$

$$Q_4^{(\pm)}(r, \theta) = \frac{iD}{2\pi} \int_{k|\cos \theta|}^k \phi_{12}^{(\pm)}(\sigma_1(\lambda_2)) \frac{d\sigma_1}{d\lambda_2} e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2, \quad (2.7)$$

$$w_{\text{отр}}(r, \theta) = e^{-ikr \cos(\theta+\beta)}, \quad w_{\infty}(r, \theta) = e^{-ikr \cos(\theta-\beta)}, \quad (2.8)$$

$$\phi_{mn}^{(\pm)}(\sigma_m(\lambda_n)) = 1/\sqrt{k - \sigma_m(\lambda_n)(\sigma_m(\lambda_n) - k \cos \beta \pm i0)}, \quad m, n = \overline{1, 2},$$

$$\sigma_1(\lambda_j) = \lambda_j |\cos \theta| + \sqrt{k^2 - \lambda_j^2} \sin \theta, \quad j = 1, 2,$$

$$\sigma_2(\lambda_2) = \lambda_2 |\cos \theta| - \sqrt{k^2 - \lambda_2^2} \sin \theta,$$

$$n_1(\tau) = \tau |\cos \theta| + i\sqrt{k^2 + \tau^2} \sin \theta, n_2 = \tau |\cos \theta| - i\sqrt{k^2 + \tau^2} \sin \theta. \quad (2.9)$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\lambda_2} = -\frac{\sqrt{k^2 - \sigma_1^2}}{\sqrt{k^2 - \lambda_2^2}}, \quad \frac{d\sigma_2}{d\lambda_j} = \frac{\sqrt{k^2 - \sigma_j^2}}{\sqrt{k^2 - \lambda_j^2}}, \quad (j = 1, 2). \quad (2.10)$$

Отметим, что при  $\pi - \beta < \theta < \pi$  уравнения

$$\sigma_1(\lambda_1) - k \cos \beta = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2(\lambda_2) - k \cos \beta = 0 \quad (2.11)$$

имеют соответственно корни  $\lambda_{11} = -k \cos(\theta - \beta)$ ,  $\lambda_{22} = -k \cos(\theta + \beta)$ , принадлежащие соответственно интервалам  $(-k \sin \theta, k |\cos \theta|)$  и  $(k \sin \theta, k)$ . При этом имеют место разложения

$$\frac{1}{\sigma_1(\lambda_1) - k \cos \beta + i0} = \frac{C_{-1}^{(1)}}{\lambda_1 - \lambda_{11} + i0} + C_0^{(1)} + C_1^{(1)}(\lambda_2 - \lambda_{11}) + \dots$$

$$\frac{1}{\sigma_2(\lambda_2) - k \cos \beta + i0} = \frac{C_{-1}^{(2)}}{\lambda_2 - \lambda_{22} + i0} + C_0^{(2)} + C_1^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_{22}) + \dots, \quad (2.12)$$

где  $C_0^{(1)}, C_1^{(1)}, \dots, C_0^{(2)}, C_1^{(2)}, \dots$  постоянные, а

$$C_{-1}^{(1)} = ((d\sigma_1/d\lambda_1)|_{\lambda_1=\lambda_{11}})^{-1} = \sin(\theta - \beta)/\sin \beta,$$

$$C_{-1}^{(2)} = ((d\sigma_2/d\lambda_2)|_{\lambda_2=\lambda_{22}})^{-1} = -\sin(\theta + \beta)/\sin \beta; \quad (2.13)$$

Б) при  $\pi/2 < \theta < \pi - \beta$  ( $\cos(\pi - \theta) < \cos \beta$ )

$$w(r, \theta) = \sum_{j=1}^3 Q_j(r, \theta) + Q_4^{(-)}(r, \theta) + w_\infty(r, \theta), \quad (2.14)$$

где  $Q_j(r, \theta)$  ( $j = 1, 2, 3$ ), и  $Q_4^{(-)}(r, \theta)$  даются формулами (2.6) и (2.7).

Отметим, что при получении (2.14) было использовано представление (1.6). В этом случае в интервале  $\pi/2 < \theta < \pi - \beta$  уравнения

$$\sigma_1(\lambda_2) - k \cos \beta = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2(\lambda_2) - k \cos \beta = 0 \quad (2.15)$$

имеют соответственно корни  $\lambda_{12} = -k \cos(\theta + \beta)$  и  $\lambda_{22} = -k \cos(\theta + \beta)$  в интервалах  $(k |\cos \theta|, k)$  и  $(k \sin \theta, k)$ . При этом

$$\frac{1}{\sigma_1(\lambda_2) - k \cos \beta - i0} = \frac{B_{-1}^{(1)}}{\lambda_2 - \lambda_{12} + i0} + B_0^{(1)} + B_1^{(1)}(\lambda_2 - \lambda_{12}) + \dots, \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{\sigma_2(\lambda_2) - k \cos \beta + i0} = \frac{B_{-1}^{(2)}}{\lambda_2 - \lambda_{22} + i0} + B_0^{(2)} + B_1^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_{12}) + \dots,$$

где  $B_0^{(1)}, B_1^{(1)}, \dots, B_0^{(2)}, B_1^{(2)}, \dots$  — постоянные, а

$$B_{-1}^{(1)} = (|d\sigma_1/d\lambda_2|_{\lambda_2=\lambda_{12}})^{-1} = \sin(\theta + \beta)/\sin \beta,$$

$$B_{-1}^{(2)} = ((d\sigma_2/d\lambda_2)|_{\lambda_2=\lambda_{22}})^{-1} = -\sin(\theta + \beta)/\sin(2\theta + \beta); \quad (2.17)$$

В) на луче  $\theta = \pi - \beta$  ( $\cos(\pi - \theta) = \cos \beta$ ) из (2.1) получим

$$w_{\pi-\beta}(r) \equiv w(r, \pi - \beta) = \sum_{j=1}^2 Q_j(r, \pi - \beta) + Q_5(r) + w_{\text{отп}}(r, \pi - \beta) + w_{\infty}(r, \pi - \beta), \quad (2.18)$$

$$Q_5(r) = \frac{iD}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{k \sin \beta}^{k-\varepsilon} \phi_5^{(2)}(\sigma_2) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \int_{k-\varepsilon}^{k \cos \beta} \phi_5^{(1)}(\sigma_1) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \right. \\ \left. + \int_{C'_\varepsilon} \phi_5^{(2)}(\sigma_2(\zeta)) e^{i\zeta r} d\zeta + \int_{C''_\varepsilon} \phi_5^{(1)}(\sigma_1(\zeta)) e^{i\zeta r} d\zeta \right\}, \quad (2.19)$$

$$\phi_5^{(j)}(\sigma_j(\lambda_2)) = [\phi_{j2}^+(\sigma_j(\lambda_2))] |_{\theta=\pi-\beta} = \\ = \frac{\sqrt{k + \sigma_j(\lambda_2)}}{[(k + \lambda_2) \sin \beta + (-1)^j \sqrt{k^2 - \lambda_2^2} \cos \beta](k - \lambda_2)}, \quad j = 1, 2, \quad (2.20)$$

где  $\phi_{j2}^+$  дается формулой (2.9), а  $C'_\varepsilon$  и  $C''_\varepsilon$  полуокружности радиуса  $\varepsilon$ , с центром в точке  $\alpha = k$ , обходимые по часовой стрелке.

Отметим, что при получении (2.18)-(2.20) имелось в виду, что при  $\theta = \pi - \beta$

$$\sigma_j(\lambda_2) - k \cos \theta = (-1)^{j+1} \sqrt{k - \lambda_2} [\sqrt{k + \lambda_2} \sin \beta + (-1)^j \sqrt{k - \lambda_2} \cos \beta], \quad j = 1, 2.$$

Таким образом, дифрагированное поле упругого перемещения в области  $\Omega_{21}(x < 0, y \geq 0)$  определяется формулами (2.5), (2.14) и (2.18) в зависимости от значения  $\theta$ , которые, как было отмечено выше, удобны для вычисления ближнего поля.

Перейдем к определению асимптотических формул для  $w(x, y)$  в рассматриваемой области  $\Omega_{21}(x < 0, y \geq 0)$ . Эти формулы будут получены из интегралов, входящих в (2.5), (2.14) и (2.18), интегрированием по частям [8,10].

Рассмотрим сначала сектор  $\pi - \beta < \theta \leq \pi$ , где перемещение дается (2.5), и введем обозначение

$$T_j^k(\sigma_j(\lambda_2)) = (-1)^j \frac{b_{-1}}{\sqrt{k - \lambda_2}} + b_0 + (-1)^j b_1 \sqrt{k - \lambda_2} + b_2(k - \lambda_2), \quad j = 1, 2, \quad (2.21)$$

где  $b_0, b_1, b_2$  — постоянные, а

$$b_{-1} = \frac{\sin(\theta/2)}{k(|\cos \theta| - \cos \beta)}. \quad (2.22)$$

Тогда, имея в виду (2.8)-(2.10), нетрудно убедиться, что

$$\phi_{j2}^+(\sigma_j(\lambda_2)) - T_j^k(\sigma_j(\lambda_2)) = O((k - \lambda_2)^{3/2}). \quad (2.23)$$

Интегрируя по частям, из (2.6) получим

$$Q_1(r, \theta) = \frac{D}{2\pi r} \frac{e^{-ikr \sin \theta} + e^{ikr \sin \theta}}{k^{3/2} \cos \beta |\cos \theta|} - \frac{D}{2\pi r} \int_0^\infty \left\{ \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\phi_1}{n'_1} \right] e^{-n_1 \tau} + \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\phi_1}{n'_2} \right] e^{-n_2 \tau} \right\} d\tau, \quad (2.24)$$

$$Q_2(r, \theta) = -\frac{D}{2\pi r} \frac{e^{-ikr \sin \theta}}{k^{3/2} \cos \beta |\cos \theta|} + \frac{D}{2\pi r} \int_{-k \sin \theta}^{k |\cos \theta|} \frac{d}{d\lambda_1} \left[ \phi_{21}^{(+)}(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{d\lambda_1} \right] e^{i\lambda_1 r} d\lambda_1.$$

Интегралы же из (2.7), как следует из (2.10), непосредственно интегрировать по частям невозможно.

Для этого представим их в виде

$$Q_3(r, \theta) + Q_4^{(+)}(r, \theta) = -\frac{iD}{2\pi} \left\{ \int_{k \sin \theta}^k \left[ \phi_{22}^{(+)}(\sigma_2(\lambda_2)) \frac{d\sigma_2}{d\lambda_2} - T_2^k(\sigma_2(\lambda_2)) \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \right.$$

$$- \int_{k |\cos \theta|}^k \left[ \phi_{12}^{(+)}(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{d\lambda_2} - T_1^k(\sigma_1(\lambda_2)) \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \int_{-\infty}^{k |\cos \theta|} T_1^k(\sigma_1(\lambda_2)) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 -$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{k \sin \theta} T_2^k(\sigma_2(\lambda_2)) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 \right\} - \frac{iD}{2\pi} q(r), \quad (2.25)$$

где  $T_j^k(\sigma_j(\lambda_2))$  дается формулой (2.21), а

$$q(r) = 2\sqrt{\pi} e^{i(kr - \pi/4)} / r^{1/2}. \quad (2.26)$$

Имея в виду (2.23), очевидно, что в (2.25) интегралы уже допускают двукратное интегрирование по частям.

Интегрируя по частям в (2.25) один раз, получим:

$$Q_3(r, \theta) + Q_4^{(+)}(r, \theta) = -\frac{D}{2\pi r} \frac{e^{-ikr \sin \theta}}{k^{3/2} \cos \beta |\cos \theta|} +$$

$$+ \frac{D}{2\pi r} \int_{k \sin \theta}^k \frac{d}{d\lambda_2} \left[ \phi_{22}^{(+)}(\sigma_2) \frac{d\sigma_2}{d\lambda_2} - T_2^k(\sigma_2(\lambda_2)) \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 -$$

$$- \frac{D}{2\pi r} \int_{k |\cos \theta|}^k \frac{d}{d\lambda_2} \left[ \phi_{12}^{(+)}(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{d\lambda_2} + T_1^k(\sigma_1(\lambda_2)) \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \frac{D}{2\pi r} \int_{-\infty}^{k |\cos \theta|} \frac{d}{d\lambda_2} T_1^k(\sigma_1(\lambda_2)) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 -$$

$$\left. - \frac{D}{2\pi r} \int_{-\infty}^{k \sin \theta} \frac{d}{d\lambda_2} T_2^k(\sigma_2(\lambda_2)) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 \right\} - \frac{iD}{2\pi} q(r).$$

Подставляя теперь (2.24) и (2.27) в (2.5), заметим, что внеинтегральные члены, появляющиеся в процессе интегрирования по частям, сокращаются. С другой стороны, имея в виду очевидное равенство

$$\int_a^b \frac{e^{i\lambda r} d\lambda}{\lambda - \lambda_0 + i0} = - \int_{-\infty}^a \frac{e^{i\lambda r} d\lambda}{\lambda - \lambda_0} - \int_b^{\infty} \frac{e^{i\lambda r} d\lambda}{\lambda - \lambda_0} = O(r^{-1}) \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (2.28)$$

где  $a < \lambda_0 < b$ , можно утверждать, что в полученном выражении интегральные составляющие будут иметь порядок  $O(r^{-2})$  при  $r \rightarrow \infty$ , в чем нетрудно убедиться повторным интегрированием по частям. В итоге получим следующую асимптотическую формулу для волнового поля в секторе  $\pi - \beta < \theta \leq \pi$ :

$$w(r, \theta) = e^{-ikr \cos(\theta - \beta)} + e^{-ikr \cos(\theta + \beta)} + \frac{2i \sin(\beta/2) \sin(\theta/2)}{\cos \theta + \cos \beta} \cdot \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(2\pi kr)^{1/2}} + O((kr)^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.29)$$

Таким образом, волновое поле в дальних зонах сектора  $\pi - \beta < \theta \leq \pi$  дается формулой (2.29) и представляется в виде суммы падающей, отраженной и дифрагированных волн.

Отметим, что (2.29) точно совпадает с известным результатом из [1,3].

Для сектора  $\pi/2 < \theta < \pi - \beta$ , аналогично рассуждая, из (2.14) получим асимптотическую формулу в виде

$$w(r, \theta) = e^{-ikr \cos(\theta - \beta)} + \frac{2i \sin(\beta/2) \sin(\theta/2)}{\cos \theta + \cos \beta} \cdot \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(2\pi kr)^{1/2}} + O((kr)^{-3/2}), \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (2.30)$$

Перейдем к лучу  $\theta = \pi - \beta$ , определяющему границу тени отраженного поля. Из (2.29) и (2.30) видно, что эти простые формулы перестают выполняться при  $\theta \approx \pi - \beta$ . Для определения волнового поля в окрестности луча обратимся к (2.19) и представим ее в виде:

$$Q_5(r) = \frac{iD}{2\pi} \left\{ \int_{k \sin \beta}^k \left[ \phi_5^{(2)}(\sigma_2 \lambda_2) - \frac{B_0}{k - \lambda_2} + \frac{B_1}{\sqrt{k - \lambda_2}} \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \int_{-\infty}^{k \cos \beta} \left[ \frac{B_0}{k - \lambda_2} + \frac{B_1}{\sqrt{k - \lambda_2}} \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \int_{k \cos \beta}^k \left[ \phi_5^{(1)}(\sigma_1(\lambda_2)) - \frac{B_0}{k - \lambda_2} - \frac{B_1}{\sqrt{k - \lambda_2}} \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \int_{-\infty}^{k \sin \beta} \left[ \frac{B_0}{k - \lambda_2} - \frac{B_1}{\sqrt{k - \lambda_2}} \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 \right\} - \frac{iDB_1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{r^{1/2}} - \frac{1}{2} e^{ikr}, \quad (2.31)$$

где  $B_0$  и  $B_1$  постоянные.

Отметим, что при выводе (2.31) имелось в виду, что

$$\frac{iD}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{C'_\varepsilon} \phi_5^{(2)}(\sigma_1(\zeta)) e^{i\zeta r} d\zeta + \int_{C''_\varepsilon} \phi_5^{(1)}(\sigma_1(\zeta)) e^{i\zeta r} d\zeta \right) = -\frac{1}{2} e^{ikr}.$$

Подставляя (2.31) в (2.18) и учитывая сделанные выше замечания о порядке убывания соответствующих интегралов, получим асимптотическую формулу при  $\theta = \pi - \beta$  в виде

$$w_{\pi-\beta}(r) = \frac{1}{2} e^{ikr} + e^{ikr \cos(2\beta)} + O((kr)^{-1/2}), \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (2.32)$$

3. Распределение волнового поля в дальних зонах для остальных областей упругой плоскости определится совершенно аналогичным пункту 2 способом.

В области  $\Omega_{22}(x < 0, y \leq 0)$  из (1.9) получим

$$w(x, y) = \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{\sigma^2 - k^2} y} e^{-y\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma - k}(\sigma - k \cos \beta + i0)}, \quad (3.1)$$

т.е. в области  $\Omega_{22}$  волновое поле представляется только дифрагированным полем (3.1)

Из (3.1) можно получить аналогичные формулам (2.5), (2.14) и (2.18) выражения, определяющие распределение волнового поля при соответствующих значениях  $\theta$ , в области  $\Omega_{22}$ . Из этих выражений получим следующие асимптотические формулы:

В секторе  $-\pi \leq \theta < -(\pi - \beta)$ , т.е. в тени,

$$w(r, \theta) = \frac{2i \sin(\beta/2) \sin(\theta/2)}{\cos \theta + \cos \beta} \cdot \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(2\pi kr)^{1/2}} + O((kr)^{-3/2}), \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

При  $\theta = -(\pi - \beta)$ , т.е. на границе тени падающего поля, получим асимптотическую формулу

$$w_{\beta-\pi}(r) = 0.5e^{ikr} + O((kr)^{-1/2}), \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

В секторе  $-(\pi - \beta) < \theta \leq -\pi/2$  имеем

$$w(r, \theta) = e^{-ikr \cos(\theta - \beta)} + \frac{2i \sin(\beta/2) \sin(\theta/2)}{\cos \theta + \cos \beta} \cdot \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(2\pi kr)^{1/2}} + O((kr)^{-3/2}), \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Исходя из представления (1.8) нетрудно получить, что в области  $r > 0$  распределение волнового поля в дальних зонах представляется формулой (3.4) при  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ .

В заключение следует еще раз отметить, что полученные здесь асимптотические формулы точно совпадают с известными результатами из [1.3].

которые были получены традиционным путем – методом перевала [11]. Здесь, на наш взгляд, эти формулы получены более доступным путем – с помощью интегрирования по частям интегралов, представляющих волновое поле.

<sup>1</sup> Ереванский государственный университет

<sup>2</sup> Институт механики НАН РА

e-mail: karo-aga@mechins.sci.am

**Э. Х. Григорян, К. А. Агаян**

### **О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн**

На примере решения задачи о дифракции сдвиговой плоской волны на краю полубесконечной трещины в упругой плоскости демонстрируется новый подход к определению асимптотических формул. В отличие от хорошо известных традиционных методов решения подобных задач решение задачи сводится к краевой задаче типа Римана на действительной оси. Для исследования полученного в виде интеграла Фурье решения разрезы в комплексной плоскости проводятся по координатным осям, и в итоге решение задачи представляется при помощи регулярных интегралов на разрезах. Асимптотические формулы, в обход общепринятого метода перевала, определяются интегрированием по частям интегралов, представляющих волновое поле.

**Է. Խ. Գրիգորյան, Կ. Ա. Աղայան**

### **Ալիքների դիֆրակցիայի խնդիրներում ասիմպտոտիկ բանաձևերի ստացման նոր մեթոդի մասին**

Առաձգական հարթության մեջ կիսաանվերջ ճաքի եզրում սահմանափակ հարթ ալիքի դիֆրակցիայի խնդրի լուծման օրինակի վրա ցուցադրվում է նոր մոտեցում ասիմպտոտիկ բանաձևերի ստացման համար: Ի տարբերություն նման խնդիրների լուծման հայտնի ավանդական մեթոդների [1-3] այսօրեղ խնդրի լուծումը բերվում է իրական առանցքի վրա Ռիմանի եզրային խնդրի փոխի հավասարման [5-10]: Ֆուրյեի ինտեգրալների տեսքով ստացված լուծման հեփագոփման համար կոնվեքս հարթության մեջ ճեղքերը տարվում են կոորդինատային առանցքներով, եւ արդյունքում խնդրի լուծումը ներկայացվում է նշված ճեղքերի վրա ռեգուլյար ինտեգրալների օգնությամբ: Շրջանցելով համընդհանուր ընդունված պերեվալի եղանակը [1-4], ասիմպտոտիկ բանաձևերը ստացվում են ալիքային դաշտը ներկայացնող ինտեգրալները մասերով ինտեգրելով:

On New Methods of Asymptotic Formulas Determination in Waves Diffraction Problems

A new approach to the determination of asymptotic formulas is demonstrated by solving the problem on shear plane wave diffraction in elastic plane at semi-infinite crack edge. As opposed to the well-known traditional methods, the solving of problems like these [1-3] is deduced to Riemann-type boundary problem for real axis [5-10]. In order to investigate the solution obtained in the form of Fourier integrals, the sections are drawn across the coordinate axis in complex plane, and as a result, the problem solution is represented in form of regular integrals in sections. The asymptotic formulas are determined by the integration by parts of integrals representing wave field, in contrast to the steepest descend method.

Литература

1. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М. Мир. 1962. 294 с.
2. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. М. Сов. радио. 1966. 432 с.
3. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М. Мир. 1974. 324 с.
4. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев. Наукова думка. 1981. 284 с.
5. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джшлавян С.А. - Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т. 56. №4. С. 3-17.
6. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. В сб.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван. 2005. С. 19-23.
7. Григорян Э.Х., Джшлавян С.А. - Изв. НАН РА. Механика. 2005. Т. 58. №1. С. 38-50
8. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. - Изв. НАН РА. Механика. 2007. Т. 60. №3. С. 23-37.
9. Восканян А.Р., Григорян Э.Х. - Изв. НАН РА. Механика. 2007. Т. 60. №2. С. 16-28.
10. Григорян Э.Х., Синанян С.С. - Изв. НАН РА Механика. 2009. Т. 62. №1. С. 40-51.
11. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М. Наука. 1967. 300 с.