ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 110 2010 № 3

МЕХАНИКА

УДК 519.7

В. Р. Барсегян

Управление линейными динамическими системами с ограничениями на значения частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени

(Представлено академиком Л.А. Агаловяном 23/III 2010)

Ключевые слова: *управление, динамические системы, части координат, фазовые ограничения, критерии качества*

1. Проблемы управления по части координат фазового вектора объекта естественным образом возникают в ряде важных для приложений задач [1-5]. Управление по отношению к части координат фазового вектора объекта предполагает меньшее воздействие на систему, чем управление по всем ее фазовым переменным, и может в значительной степени сохранить естественную динамику этой системы.

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый системой

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t), \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$, $A(t) - (n \times n)$, $B(t) - (n \times r)$-мерные матрицы, элементы которых являются измеримыми ограниченными функциями при $t_0 \le t \le T$ (t_0 и T — заданные моменты времени), $u(t)$ — r-мерный вектор-столбец управляющих воздействий, компоненты которых считаются измеримыми ограниченными функциями, $f(t)$ — n-мерный вектор внешних воздействий (может быть измеримой ограниченной функцией).

Пусть заданы начальное

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

конечное

$$x(T) = x_T \tag{1.3}$$

состояния системы (1.1) и в некоторые фиксированные промежуточные моменты времени

$$0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$$

заданы некоторые или все значения координат фазового вектора $x(t_k)$:

$$x_{i_1}(t_k), \ldots, x_{i_k}(t_k), \quad (i_k \le n,\ k = 1, \ldots, m), \tag{1.4}$$

а остальные (при $i_k < n$) $n - i_k$ фазовые координаты в промежуточные моменты времени могут принимать любые значения (т.е. свободны).

Вообще для ряда прикладных задач (при управлении манипуляционными роботами, летательными аппаратами и т.п.) можно предполагать, что в промежуточные моменты времени значения части координат фазового вектора принадлежат некоторым компактным множествам:

$$x_{i_1}(t_k) \in X_{i_1}^{(k)}, \ldots, x_{i_k}(t_k) \in X_{i_k}^{(k)};\ (i_k \le n,\ k = 1, \ldots, m). \tag{1.5}$$

Предполагается, что все заданные значения (1.4) и (1.3) принадлежат области достижимости системы (1.1).

Для $x(t)$ решения системы (1.1) условия (1.4) (или (1.5)) являются фазовыми ограничениями по отношению к части фазовых переменных [6,7].

Решение некоторых навигационных задач приводится к построению программы полета аппарата через несколько заранее заданных значений части фазового вектора, и если (1.1) описывает некоторый технологический процесс, то в качестве примера может служить требование прохождения процесса с приобретением нескольких качеств [5].

Предположим, что система (1.1) при фазовых ограничениях (1.2), (1.3) и (1.4) (или (1.5)) на промежутке времени $[t_0, T]$ является вполне управляемой [2, 7]. Это означает, что на промежутке времени $[t_0, T]$ можно выбрать управляющее воздействие $u(t)$ и соответствующее движение $x(t) = x(t, u(t))$, удовлетворяющие системе (1.1) и условиям (1.2), (1.3) и (1.4) (или (1.5)).

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Требуется найти условия, при которых существует программное управляющее воздействие $u = u(t)$ и программное движение $x = x(t)$, удовлетворяющие системе (1.1) и условиям (1.2), (1.3) и (1.4) (или (1.5)), а также построить их.

Пусть для отбора оптимальных решений на промежутке времени $[t_0, T]$ задан критерий качества æ$[u]$, который может иметь смысл нормы некоторого нормированного пространства.

Задачу оптимального управления можно сформулировать следующим образом

Задача 2. Требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, переводящее систему (1.1) из состояния (1.2) через промежуточные состояния (1.4) (или через состояния (1.5)) в конечное состояние (1.3) и имеющее наименьшее возможное значение критерия качества $æ[u^0]$.

2. Для решения поставленных задач условия (1.2), (1.3) и (1.4) представим в виде

$$G_k x(t_k) = a_k \ (k = 0, 1, \dots, m + 1), \tag{2.1}$$

где G_k — $(i_k \times n)$-мерные матрицы, элементы которых являются вещественными числами, a_k — i_k-мерный вектор, элементы которого являются частью или всеми координатами фазового вектора $x(t_k)$. В общем случае элементы вектора a_k могут быть линейными комбинациями координат фазового вектора $x_j(t_k)(j \le i_k)$.

В (2.1) при $k = 0$ и $k = m + 1$ обозначены $i_0 = i_{m+1} = n$, $G_0 = G_{m+1} = E$ — $n \times n$-мерная единичная матрица, а следовательно $x(t_0) = a_0$, $x(T) = a_{m+1}$. Если, например, в момент времени t_1 задано только значение $x_1(t_1)$, а остальные координаты фазового вектора $x(t_1)$ свободны, тогда $i_1 = 1$ и $G_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

При фазовом ограничении (1.5) условие, аналогичное (2.1), будет

$$G_k x(t_k) \in X^{(k)} \quad (k = 1, \dots, m) \tag{2.2}$$

и, не нарушая общности, будем предполагать, что значения фазовых координат $x_{i_1}(t_k), \dots, x_{i_k}(t_k)$ зафиксированы и принадлежат $X_{i_1}^{(k)}, \dots, X_{i_k}^{(k)}$ ($i_k \le n$, $k = 1, \dots, m$) соответственно.

Напишем решение уравнения (1.1) следующим образом:

$$x(t) = X[t, t_0]x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} H[t, \tau]u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} X[t, \tau]f(\tau)d\tau, \tag{2.3}$$

где $H[t, \tau] = X[t, \tau]B(\tau)$, а через $X[t, \tau]$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородной части уравнения (1.1).

Предполагая, что искомые управляющие воздействия известны, для моментов времени $t = t_k$ из формулы (2.3) будем иметь

$$x(t_k) = X[t_k, t_0]x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_k} H[t_k, \tau]u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_k} X[t_k, \tau]f(\tau)d\tau.$$

Подставляя значения $x(t_k)$ в (2.1), получим следующие интегральные соотношения:

$$\int\limits_{t_0}^{t_k} G_k H[t_k, t]u(t)dt = \eta(t_0, t_k) \ (k = 1, \dots, m + 1), \tag{2.4}$$

где

$$\eta(t_0,t_k)=a_k-G_k\left(X[t_k,t_0]x(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t_k}X[t_k,t]f(t)dt\right). \tag{2.5}$$

Как было принято в работе [7], здесь вместо $H[t_k,t]$ введем функции $H_k[t]$ следующим образом:

$$H_k[t]=\begin{cases} H[t_k,t] & \text{при} \quad t_0\le t\le t_k, \\ 0 & \text{при} \quad t_k\le t\le t_{m+1}+T \ (k=1,\dots,m+1). \end{cases} \tag{2.6}$$

Элементы матрицы $H_k[t]$ — измеримые ограниченные функции на промежутке времени $[t_0,T]$.

Соотношение (2.4) при помощи введенной в (2.6) функции $H_k[t]$ запишется так:

$$\int\limits_{t_0}^{T}G_kH_k[t]u(t)dt=\eta(t_0,t_k) \quad (k=1,\dots,m+1). \tag{2.7}$$

Отметим, что в (2.7) число интегральных соотношений равно $\sum\limits_{k=1}^{m+1}i_k$.

Введем следующую блочную (размерность каждого блока $G_kH_k[t]-(i_k\times r)$) матрицу:

$$H[t]=\begin{pmatrix} G_1H_1[t] \\ \vdots \\ G_{m+1}H_{m+1}[t] \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

с размерностью $\sum\limits_{k=1}^{m+1}i_k\times r$. Тогда интегральные условия (2.7) при помощи введенной матрицы (2.8) можно представить в виде

$$\int\limits_{t_0}^{T}H[t]u(t)dt=\eta(t_0,\dots,T), \tag{2.9}$$

где вектор $\eta(t_0,\dots,T)$ — $\sum\limits_{k=1}^{m+1}i_k$-мерный блочный вектор-столбец с блоками $\eta(t_0,t_k)$ $(k=1,\dots,m+1)$.

Теперь на основе вышеприведенного функцию $u(t)$, удовлетворяющую интегральному соотношению (2.9), ищем в виде [4]

$$u(t)=H^T[t]C+V(t), \tag{2.10}$$

где $H^T[t]$ транспонированная матрица, C — постоянный вектор, подлежащий определению, $V(t)$ — некоторая вектор-функция (может быть измеримая ограниченная функция на промежутке времени $[t_0,T]$) и такая, что

$$\int\limits_{t_0}^{T}H[t]V(t)dt=0. \tag{2.11}$$

Равенство (2.11) выражает условие ортогональности вектор-функций $V(t)$ ко всем строкам (блокам) матрицы $H[t]$.

Подставляя (2.10) в (2.9) получим

$$Q(t_0,\dots,T)C = \eta(t_0,\dots,T), \tag{2.12}$$

где

$$Q(t_0,\dots,T) = \int\limits_{t_0}^{T} H[t]H^T[t]dt. \tag{2.13}$$

(2.12) является системой $\sum\limits_{k=1}^{m+1} i_k$ алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_j \left(j = 1,\dots,\sum\limits_{k=1}^{m+1} i_k\right)$.

Уравнение (2.12) имеет решение, если $det\,Q \neq 0$ либо ранг матрицы Q совпадает с рангом расширенной матрицы $\{Q,\eta\}$.

Решение уравнения (2.12) будет

$$C = Q^{-1}\eta, \tag{2.14}$$

следовательно, из (2.10) имеем

$$u(t) = H^T[t]Q^{-1}\eta + V(t). \tag{2.15}$$

Таким образом, решение задачи 1 можно сформулировать в виде следующей теоремы, аналогичной теореме, доказанной в [4].

Теорема. *Для того чтобы существовало программное управление (2.10) и соответствующее ему решение системы (1.1), удовлетворяющее условиям (2.1), необходимо и достаточно, чтобы матрица (2.13) была неособой или чтобы ранги матрицы Q и $\{Q,\eta\}$ совпадали между собой.*

Учитывая обозначения (2.8) и (2.6), при $V(t) = 0$ (2.15) представится в следующем виде:

$$u(t) = \begin{cases} ((G_1H[t_1,t])^T, (G_2H[t_2,t])^T,\dots,(G_{m+1}H[t_{m+1},t])^T)Q^{-1}\eta, \text{ при } t\in[t_0,t_1], \\ (0,(G_2H[t_2,t])^T,\dots,(G_{m+1}H[t_{m+1},t])^T)Q^{-1}\eta, \text{ при } t\in[t_1,t_2], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (0,0,\dots,0,\ (G_{m+1}H[t_{m+1},t])^T)Q^{-1}\eta, \text{ при } t\in[t_m,T]. \end{cases} \tag{2.16}$$

Подставляя (2.16) в (2.3) и для промежуточных моментов времени t_k учитывая непрерывность движения, получим программное движение системы (1.1) на промежутке времени $[t_0,T]$, удовлетворяющее условиям (2.1).

Отметим, что при фазовом ограничении (1.5) (или (2.2)) программное управление $u(t)$ имеет вид (2.16), соответствующее движение $x(t)$ будет зависеть от точек $x_{i_1}(t_k), \dots, x_{i_k}(t_k)$, $(i_k \le n,\ k = 1, \dots, m)$ и, следовательно, при разных значениях этих точек, удовлетворяющих условиям (1.5) (или (2.2)), получим все возможные решения.

Для решения задачи 2 заметим следующее. При заданном критерии качества $æ[u]$ задачу оптимального управления с интегральными условиями (2.9) можно рассматривать как задачу условного экстремума из вариацинного исчисления, где надлежит определить минимум функционала $æ[u]$, при условиях (2.9). Однако, как видно из (2.6), подынтегральные функции в (2.9) являются разрывными, поэтому классические теоремы вариационного исчисления не применимы для исследования этой задачи [2].

Левой частью условия (2.9) является линейная операция, порожденная функцией $u(t)$ на промежутке времени $[t_0, T]$.

Следовательно, если функционал $æ[u]$ является нормой некоторого линейного нормированного пространства, то решение задачи 2 следует искать с помощью проблемы моментов; тогда оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, минимизирующее функционал $æ[u]$ и удовлетворяющее условию (2.9) будет решением задачи 2.

Таким образом, задача 2 приводится к проблеме моментов, решение которой известно из [2].

При фазовом ограничении (1.5) (или (2.2)) будем предполагать, что зафиксированы некоторые значения частей координат фазового вектора, удовлетворяющего этим ограничениям, следовательно, построенное оптимальное управляющее воздействие и соответственное значение критерия качества будут зависеть от значения частей координат фазового вектора (1.4), т. е.

$$u^0(t) = (t, \{x_{i_1}(t_k), \dots, x_{i_k}(t_k)\},\ k = 1, \dots, m),$$

$$æ[u^0] = æ[u^0(\{x_{i_1}(t_k), \dots, x_{i_k}(t_k)\},\ k = 1, \dots, m)]. \tag{2.17}$$

Поэтому имеется возможность с помощью минимизации (2.17) с условием (1.5) (или (2.2)) найти оптимальные значения частей координат фазового вектора, удовлетворяющего ограничениям (1.5) (или (2.2)).

3. В качестве иллюстрации задачи 1 рассмотрим задачу управления материальной точкой, движущейся в вертикальной плоскости под действием реактивной силы и силы тяжести. Тогда ее движение можно записать векторным уравнением

$$m\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{P} + \overline{f}, \tag{3.1}$$

где $m = m_0 + m_1(t)$, $m_0 = \text{const}$, $m_1(t)$ — реактивная масса точки, $\overline{f}$ — реактивная сила, $\overline{P} = m\overline{g}$. Будем считать реактивную силу управляющим воздействием.

Уравнение движения (3.1) представим в нормальной форме

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u_1, \dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = u_2 - g. \tag{3.2}$$

Пусть $t_0 = 0$, $T = 3$. Начальное и конечное состояние фазового вектора $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ выберем $x(0) = \{0, 0, 0, 0\}$, $x(3) = \{3, 2, 2, 1\}$.

Пусть заданы промежуточные моменты времени $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ и значения части координат фазового вектора

$$x_1(1) = 1, \quad x_1(2) = 2,$$
$$x_2(1) = 1, \quad x_3(2) = 1.$$

Проведя необходимые вычисления, согласно (2.16) для управляющих воздействий будем иметь следующие выражения:

$$u(t) = \begin{pmatrix} 4 - 6t \\ \dfrac{7}{12} + g - \dfrac{t}{8} \end{pmatrix} \text{ при } t \in [0, 1),$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} 2 - \dfrac{3}{2}t \\ \dfrac{7}{12} + g - \dfrac{t}{8} \end{pmatrix} \text{ при } t \in [1, 2),$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} -10 + \dfrac{9}{2}t \\ \dfrac{4}{3} + g - \dfrac{t}{2} \end{pmatrix} \text{ при } t \in [2, 3]$$

Если найденные выражения для управления $u(t)$ подставить в (3.2) и на каждом промежутке времени проинтегрировать эти уравнения при начальном и промежуточном значениях, заданных для фазового вектора, получим движение объекта в следующем виде:

$$x(t) = \begin{pmatrix} (2 - t)t^2 \\ (4 - 3t)t \\ \dfrac{1}{48}(14 - t)t^2 \\ \dfrac{1}{48}(28 - 3t)t \end{pmatrix} \text{ при } t \in [0, 1),$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4}(2 - t)(-1 + t)^2 + 1 \\ -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}(8 - 3t)t \\ -\dfrac{1}{4} + \dfrac{25}{48}t + \dfrac{1}{48}(12 - t)(-1 + t)^2 \\ \dfrac{1}{48}(28 - 3t)t \end{pmatrix} \text{ при } t \in [1, 2),$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}(t-2)^2(3t-8) \\ \frac{47}{4} - 10t + \frac{9}{4}t^2 \\ -\frac{5}{6} + \frac{11}{12}t + \frac{1}{12}(4-t)(t-2)^2 \\ -\frac{3}{4} + \frac{4}{3}t - \frac{t^2}{4} \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [2,3].$$

Таким образом, для системы (3.2) с заданными начальными, конечными значениями фазового вектора и промежуточными значениями для части координат получены явные виды программного управления и программного движения.

Для иллюстрации задачи 2 рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}_1 = x_1 + u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2. \tag{3.3}$$

Пусть $t_0 = 0$, $T = 3$. Начальное и конечное состояния фазового вектора $x = \{x_1, x_2\}$ выберем

$$x_1(0) = 0, \quad x_1(3) = 3,$$
$$x_2(0) = 0, \quad x_2(3) = 2,$$

Пусть заданы промежуточные моменты времени $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ и значения части координат фазового вектора

$$x_1(1) = 1, \quad x_2(2) = 1.$$

Критерий качества имеет вид

$$\text{æ}[u] = \left(\int_{t_0}^{T} (u_1^2 + u_2^2)dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4}$$

Следовательно, согласно (2.1) будем иметь

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = (0, 1).$$

Для системы (3.3)

$$H[t_k, t] = \begin{pmatrix} 1 & t_k - t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Согласно (2.5) и (2.8)

$$\begin{aligned} &\eta(0,1) = 1, && G_1 H[t_1, t] = (1, t_1 - t), \\ &\eta(0,2) = 1, && G_2 H[t_2, t] = (0, 1), \\ &\eta(0,3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, && G_3 H[t_3, t] = \begin{pmatrix} 1 & t_3 - t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \qquad H[t] = \begin{pmatrix} 1 & t_1 - t \\ 0 & 1 \\ 1 & t_3 - t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Вводя обозначения

$$h_{11}(t_1,t)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad t\in[t_0,t_1),\\ 0 & \text{при} \quad t\in[t_1,T],\end{cases} \qquad h_{12}(t_1,t)=\begin{cases}t_1-t & \text{при} \quad t\in[t_0,t_1),\\ 0 & \text{при} \quad t\in[t_1,T],\end{cases}$$

$$h_{22}(t_1,t)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad t\in[t_0,t_1),\\ 0 & \text{при} \quad t\in[t_1,T],\end{cases} \qquad \begin{matrix} h_{31}(T,t)=h_{42}(T,t)=1 & \text{при} \quad t\in[t_0,T), \\ h_{32}(T,t)=T-t & \text{при} \quad t\in[t_0,T],\end{matrix}$$

согласно (2.9) будем иметь интегральные соотношения

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{T}[h_{11}(t_1,t)u_1+h_{12}(t_1,t)u_2]dt=1, \quad \int_{t_0}^{T}h_{22}(t_2,t)u_2dt=1,\\ &\int_{t_0}^{T}[h_{31}(T,t)u_1+h_{32}(T,t)u_2]dt=3, \quad \int_{t_0}^{T}h_{42}(T,t)u_2dt=2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Решая задачу (3.4) и (3.5) как проблему моментов для оптимальных управляющих воздействий, получим

$$u_1^0(t)=\begin{cases}\dfrac{504}{793} & \text{при} \quad t\in[t_0,t_1),\\ -\dfrac{114}{793} & \text{при} \quad t\in[t_1,T],\end{cases}$$

$$u_2^0(t)=\begin{cases}-\dfrac{2}{793}(-373+252t) & \text{при} \quad t\in[t_0,t_1),\\ \dfrac{2}{793}(64+57t) & \text{при} \quad t\in[t_1,t_2),\\ \dfrac{2}{793}(254+57t) & \text{при} \quad t\in[t_2,T].\end{cases}$$

Подставляя значения $u_1^0(t)$, $u_2^0(t)$ в (3.3) и проинтегрировав, получим оптимальное движение, а из (3.4) можно получить минимальное значение функционала $æ[u^0]$.

Ереванский государственный университет

В. Р. Барсегян

Управление линейными динамическими системами с ограничениями на значения частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени

Рассматриваются задачи управления линейными динамическими системами с ограничениями на значения разных частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени и оптимального управления с критерием качества, заданным на весь промежуток времени. Построен явный вид управляющего воздействия для задачи управления и предложен метод решения задачи оптимального управления. Приведены решения конкретных задач.

Վ. Ռ. Բարսեղյան

Գծային դինամիկ համակարգերի ղեկավարումը ժամանակի միջանկյալ պահերին ֆազային վեկտորի կոորդինատների մասերի վրա դրված սահմանափակումներով

Աշխատանքում դիտարկված են ժամանակի միջանկյալ պահերին ֆազային վեկտորի կոորդինատների տարբեր մասերի վրա դրված սահմանափակումներով գծային դինամիկ համակարգերի ղեկավարման եւ ժամանակի ամբողջ հատվածի վրա տրված որակի հայտանիշով օպտիմալ ղեկավարման խնդիրներ: Ղեկավարման խնդրի համար կառուցված է ղեկավարող ազդեցությունը, եւ առաջարկված է օպտիմալ ղեկավարման խնդրի լուծման եղանակ: Բերված են կոնկրետ խնդիրների լուծումներ:

V. R. Barseghyan

Controlling of Linear Dynamic Systems with Restrictions on Values of Parts of Coordinates of a Phase Vector in the Intermediate Moments of Time

The problems of controlling of linear dynamic systems with restrictions on values of different parts of coordinates of a phase vector in the intermediate moments of time and the problems of optimal controlling with quality, set on all time interval, are considered in the paper. The controlling influence for a problem of controlling is constructed and a method of the solving the problem of optimal control is offered. There are also presented examples of solving some controlling.

Литература

1. *Понтрягин Л.С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М физматгиз. 1961.

2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением, М. Наука. 1968. 476 с.

3. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения М. Научный мир. 2001. 320 с.

4. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М. Наука. 1975. 496 с.

5. *Верещагин И. Ф.* Методы исследования режимов полета аппарата переменной массы. 2. Механика программного движения аппарата. Пермь. 1972. 294 с.

6. *Габриелян М.С.* - Уч. записки ЕГУ. 1973. Вып. 3. С. 35-40.

7. *Барсегян В.Р.* - Изв. НАН РА. Механика. 1999. Т. 52. N 2. С. 56-62.