

УДК 539.3

Р. М. Киракосян

**Задачи ортотропных пластинок-полос
при действии касательных поверхностных нагрузок**

(Представлено академиком Л.А. Агаловяном 11/II 2010)

Ключевые слова: *пластинка-полоса, поправочные коэффициенты, касательные напряжения, поперечные сдвиги, форма распределения*

Сдвиговая теория первого порядка [1] влияние поперечных сдвигов учитывает с помощью перерезывающих сил. Поэтому в случае самоуравновешенных поперечных касательных напряжений, когда перерезывающие силы равны нулю, эта теория поправки к классическим значениям расчетных величин пластинки не дает. Теория же, рассмотренная в [2], влияние поперечных сдвигов учитывает в связи с характером изменения поперечных касательных напряжений по толщине пластинки. В силу этого она приводит к поправкам и в случае равенства нулю перерезывающих сил.

В настоящей статье в рамках теории [2] получают аналитически замкнутые решения четырех задач ортотропных пластинок-полос, несущих касательные поверхностные нагрузки.

1. В сдвиговой теории первого порядка [1] для цилиндрического изгиба пластины принимается

$$u_x = z\varphi(x), \quad u_z = w(x). \quad (1.1)$$

Здесь x – планарная, z – поперечная координаты, u_x, u_z – перемещения, φ – угол поворота нормального элемента пластинки в плоскости xOz .

В работе [2] с применением теоремы виртуальных работ получены выражения поправочных коэффициентов, которые позволяют влияние поперечных сдвигов учитывать в связи с характером изменения поперечных касательных напряжений по толщине пластинки. В задачах цилиндрического изгиба получается соотношение

$$Q_x = \frac{5}{6} B_{55} h \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right) + \frac{X_1 h}{6}, \quad (1.2)$$

где Q_x – перерезывающая сила, B_{55} – модуль сдвига материала в плоскости xOz , h – толщина пластинки. Величина X_1 выражается через проекции касательных поверхностных нагрузок X^\pm формулой [3]

$$X_1 = \frac{X^+ - X^-}{2}. \quad (1.3)$$

Знаки „+” и „-” относятся к поверхностям $z = \pm h/2$ соответственно.

Изгибающий момент цилиндрически изгибаемой пластинки имеет вид

$$M_x = D_{11} \frac{d\varphi}{dx} \quad \left(D_{11} = \frac{B_{11} h^3}{12} \right), \quad (1.4)$$

B_{11} выражается через механические параметры материала известной формулой [3].

Из уравнений равновесия дифференциального элемента срединной плоскости пластинки получается разрешающая система дифференциальных уравнений, которая в случае цилиндрического изгиба принимает вид [2]

$$\begin{aligned} B_{55} \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) &= -\frac{1}{5} \frac{dX_1}{dx}, \\ D_{11} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{5}{6} B_{55} h \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right) &= -\frac{5}{6} X_1 h. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Наиболее часто встречающиеся краевые условия при цилиндрическом изгибе пластин принимают вид:

а) жестко заделанный край

$$w = 0, \quad \varphi = 0, \quad (u_x = 0); \quad (1.6)$$

б) шарнирно опертый край

$$w = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad (M_x = 0); \quad (1.7)$$

в) свободный край

$$5B_{ss} \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right) + X_1 = 0, \quad (Q_x = 0), \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad (M_x = 0). \quad (1.8)$$

В рамках теории [1] вместо системы (1.5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} &= 0, \\ D_{11} \frac{d^2\varphi}{dx^2} - B_{ss}h \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right) &= -X_1h. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Из краевых условий отличается только первое условие свободного края (1.8), которое имеет вид

$$\varphi + \frac{dw}{dx} = 0 \quad (Q_x = 0). \quad (1.10)$$

Следует отметить, что в статически определимых задачах вместо системы разрешающих уравнений достаточно использовать выражения перерезывающей силы и изгибающего момента с соответствующими краевыми условиями. Так будем поступать при решении ниже рассматриваемых первых трех задач.

2. Пластика-полоса закреплена вдоль края $x = 0$ и свободна при $x = l$. Она несет равномерно распределенные касательные поверхностные нагрузки $X^+ = -\tau$, $X^- = \tau$ (рис.1). Задача статически определима. Из условий статики следует

$$Q_x \equiv 0, \quad M_x = -\tau h(l - x). \quad (2.1)$$

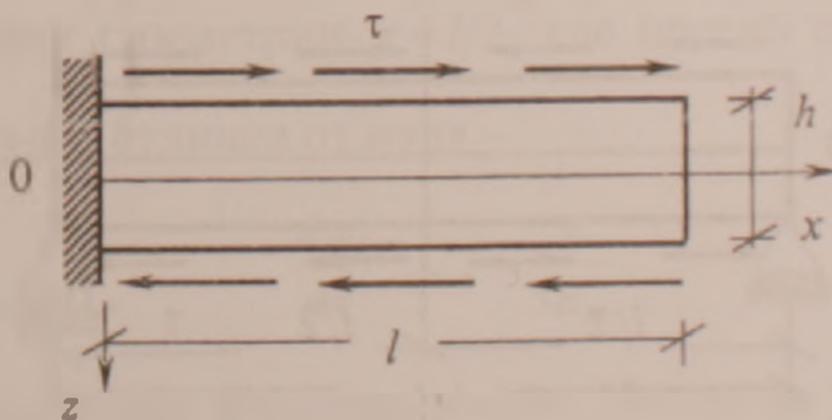


Рис. 1

Имея в виду, что $X_1 = -\tau$, с учетом (2.1) из (1.2) и (1.4) получим

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\tau}{5B_{55}} - \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\tau h}{D_{11}}(l-x). \quad (2.2)$$

Из этих уравнений при краевых условиях

$$w|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=0} = 0 \quad (2.3)$$

находим

$$\varphi = -\frac{\tau h x}{2D_{11}}(2l-x), \quad w = \frac{\tau h}{6D_{11}}x^2(3l-x) + \frac{\tau x}{5B_{55}}. \quad (2.4)$$

Для наибольшего прогиба получим

$$w_0 = w|_{x=l} = \frac{\tau h l^3}{3D_{11}} \left(1 + \frac{1}{20} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2} \right). \quad (2.5)$$

Относительная поправка к наибольшему прогибу составляет

$$\alpha = \frac{\Delta w_0}{w_0^{*c}} = \frac{1}{20} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2}. \quad (2.6)$$

Здесь Δw_0 – абсолютная поправка наибольшего прогиба, w_0^{*c} – наибольший прогиб по классической теории пластин.

3. Пластинка-полоса шарнирно оперта вдоль краев $x=0$ и $x=l$ (рис. 2). Она несет равномерно распределенные касательные поверхностные нагрузки, симметричные относительно сечения $x=l/2$:

$$X^+ = \begin{cases} -\tau, & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ \tau, & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}, \quad X^- = \begin{cases} \tau, & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ -\tau, & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}. \quad (3.1)$$

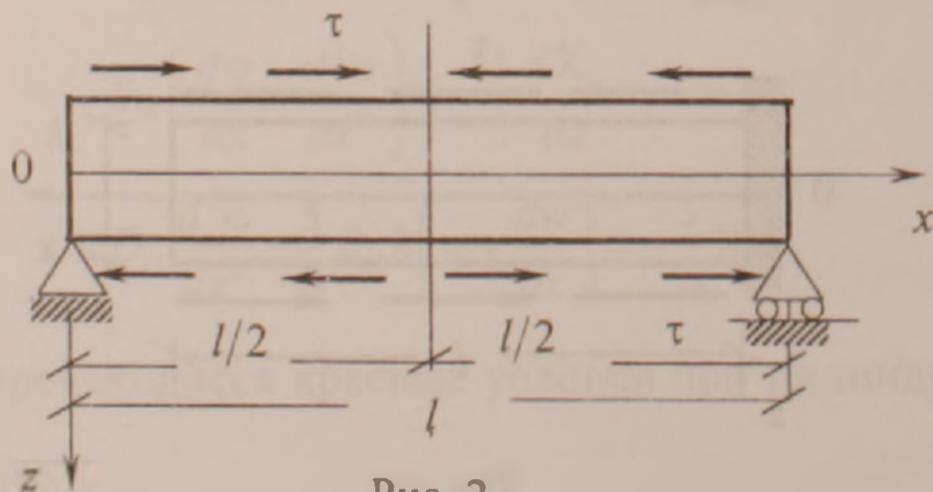


Рис. 2

Параметр нагрузки X , будет

$$X_1 = \begin{cases} -\tau, & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ \tau, & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases} \quad (3.2)$$

Из-за симметрии рассмотрим лишь одну половину пластинки-полосы, например, участок $0 \leq x < \frac{l}{2}$. Из условий статики следует

$$Q_x \equiv 0, \quad M_x = \tau h x, \quad 0 \leq x < \frac{l}{2}. \quad (3.3)$$

С учетом (3.3) из (1.2) и (1.4) получим

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\tau}{5B_{55}} - \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\tau h x}{D_{11}}. \quad (3.4)$$

Интегрировав эти уравнения и удовлетворив условиям

$$w|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=l/2} = 0, \quad (3.5)$$

находим

$$\varphi = -\frac{\tau h}{8D_{11}}(l^2 - 4x^2), \quad w = \frac{\tau h x}{24D_{11}}(3l^2 - 4x^2) + \frac{\tau x}{5B_{55}}. \quad (3.6)$$

Для наибольшего прогиба получим

$$w_0 = w|_{x=l/2} = \frac{\tau h l^3}{24D_{11}} \left(1 + \frac{1}{5} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2} \right). \quad (3.7)$$

Относительная поправка к наибольшему прогибу составляет

$$\alpha = \frac{1}{5} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2}. \quad (3.8)$$

Заметим, что в сечении симметрии $x = l/2$, где прогиб принимает наибольшее значение, функция dw/dx отлична от нуля –

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l/2-0} = \frac{\tau}{5B_{55}}. \quad (3.9)$$

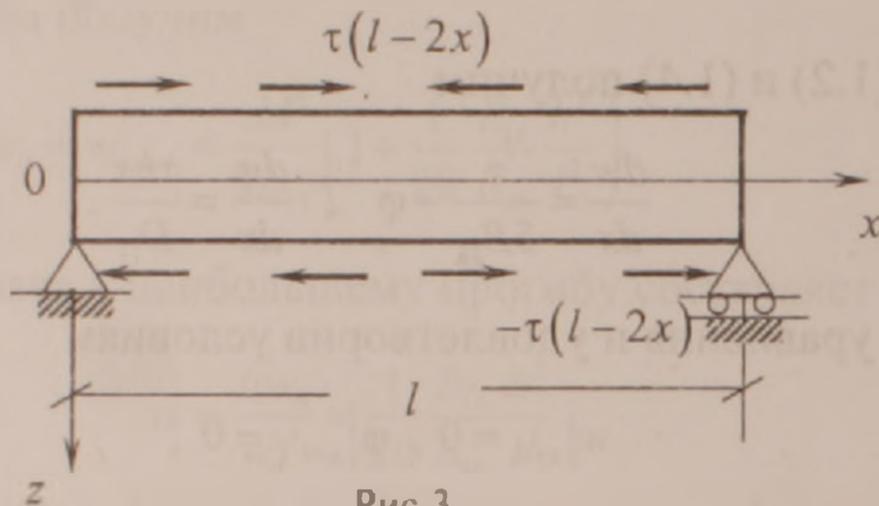
Это левостороннее значение функции dw/dx . Нетрудно убедиться, что в силу симметрии правостороннее значение dw/dx будет

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l/2+0} = -\frac{\tau}{5B_{55}}. \quad (3.10)$$

Таким образом, в сечении $x = l/2$ функция dw/dx имеет разрыв. Величина этого разрыва составляет

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l/2+0} - \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l/2-0} = -\frac{2\tau}{5B_{55}}. \quad (3.11)$$

4. Пластинка-полоса шарнирно оперта вдоль краев $x=0$, $x=l$ и несет линейно-переменные касательные поверхностные нагрузки, симметричные относительно сечения $x=l/2$ (рис. 3).



Параметр X_1 имеет вид

$$X_1 = -\tau(l-2x). \quad (4.1)$$

Из условий статики имеем

$$Q_1 \equiv 0, \quad M_1 = \int_0^x \tau h(l-2x) dx = \tau h x(l-x). \quad (4.2)$$

С учетом (4.1) и (4.2) из (1.2) и (1.4) получим

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\tau(l-2x)}{5B_{55}} - \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\tau h x}{D_{11}}(l-x). \quad (4.3)$$

Интегрировав уравнения (4.3) и удовлетворив крайевым условиям

$$w \Big|_{x=0}^{x=l} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=0}^{x=l} = 0, \quad \left(M_x \Big|_{x=0}^{x=l} = 0 \right), \quad (4.4)$$

находим

$$\varphi = -\frac{\tau h}{12D_{11}}(l^3 - 6lx^2 + 4x^3), \quad w = \frac{\tau h x}{12D_{11}}(l^3 - 2lx^2 + x^3) + \frac{\tau x(l-x)}{5B_{55}}. \quad (4.5)$$

Наибольший прогиб будет

$$w_0 = w \Big|_{x=l/2} = \frac{5\tau h l^4}{192D_{11}} \left(1 + \frac{4}{25} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2} \right). \quad (4.6)$$

Относительная поправка наибольшего прогиба составляет

$$\alpha = \frac{4}{25} \frac{B_{11}}{B_{33}} \frac{h^2}{l^2}. \quad (4.7)$$

В сечении симметрии $x = l/2$, где прогиб принимает максимальное значение, имеют место равенства

$$\varphi = \frac{dw}{dx} = 0. \quad (4.8)$$

В рассмотренных трех задачах, из-за отсутствия перерезывающей силы, теория [1] поправки не дает.

5. Пластинка-полоса закреплена вдоль края $x = 0$ и шарнирно оперта вдоль края $x = l$. Она несет равномерно распределенные касательные поверхностные нагрузки (рис.4). Параметр нагрузки X_1 имеет значение

$$X_1 = \tau. \quad (5.1)$$

Задача статически неопределима, в силу чего для ее решения неизбежно надо иметь дело с разрешающей системой уравнений (1.5). При (5.1) эта система приводится к виду

$$\frac{dw}{dx} = C_1 - \varphi, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{5\tau h}{6D_{11}} + \frac{5}{6} \frac{B_{33}}{D_{11}} \cdot C_1. \quad (5.2)$$

Здесь C_1 – постоянная, которая появляется в результате интегрирования первого уравнения системы (1.5).

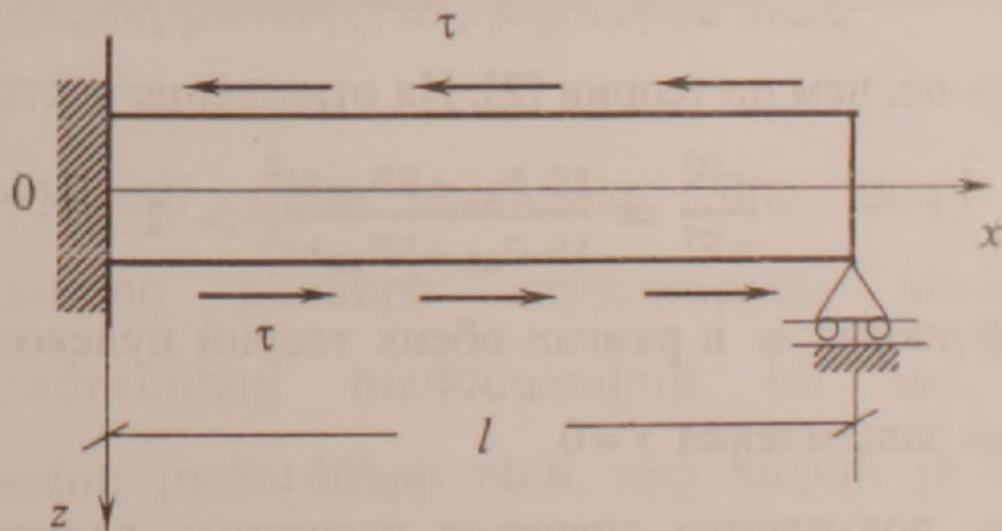


Рис. 4

Краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} w|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=0} = 0, \quad (u_x|_{x=0} = 0), \\ w|_{x=l} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx}|_{x=l} = 0, \quad (M_x|_{x=l} = 0). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Интегрировав уравнения (5.2) и удовлетворив условиям (5.3), получим

$$\varphi = \frac{15\tau hx(2l-x)}{2(18D_{11} + 5B_{55}hl^2)}, \quad Q_x = \frac{\tau h(3D_{11} + 5B_{55}hl^2)}{18D_{11} + 5B_{55}hl^2}, \quad (5.4)$$

$$M_x = \frac{15\tau hD_{11}(l-x)}{18D_{11} + 5B_{55}hl^2}, \quad w = \frac{5\tau hx(2l^2 - 3lx + x^2)}{2(18D_{11} + 5B_{55}hl^2)}$$

Наибольший прогиб получается в сечении

$$X_0 = l \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (5.5)$$

и имеет значение

$$w_0 = w|_{x=X_0} = 0,962 \frac{\tau hl^3}{18D + 5B_{55}hl^2}. \quad (5.6)$$

Не вдаваясь в подробности, приведем решение этой задачи в рамках теории [1]:

$$\varphi = \frac{3\tau hx(2l-x)}{2(3D_{11} + B_{55}hl^2)}, \quad Q_x = \frac{B_{55}\tau h^2 l^2}{3D_{11} + B_{55}hl^2}, \quad (5.7)$$

$$M_x = \frac{3\tau hD_{11}(l-x)}{3D_{11} + B_{55}hl^2}, \quad w = \frac{\tau hx(2l^2 - 3lx + x^2)}{2(3D_{11} + B_{55}hl^2)}$$

Наибольший прогиб также получается в сечении (5.5). Он имеет значение

$$w_0 = w|_{x=X_0} = 0,192 \frac{\tau hl^3}{3D_{11} + B_{55}hl^2}. \quad (5.8)$$

Сравнивая выражения (5.4) и (5.7), замечаем, что прогибы по теории [1] получаются больше, чем по теории [2]. Их отношение составляет

$$\frac{w^{[1]}}{w^{[2]}} = \frac{18D_{11} + 5B_{55}hl^2}{15D_{11} + 5B_{55}hl^2} > 1. \quad (5.9)$$

Отметим, что функция φ в рамках обеих теорий нулевое значение принимает только в сечении защемления $x=0$.

При $B_{55} \rightarrow \infty$ получаются значения расчетных величин, соответствующие классической теории Кирхгофа, которые, как и следовало ожидать, по теориям [1] и [2] совпадают. Они имеют вид

$$\varphi \equiv 0, \quad Q_x = \tau h, \quad M_x \equiv 0, \quad w \equiv 0. \quad (5.10)$$

В заключение отметим, что во всех рассмотренных в настоящей статье случаях параметр нагрузки

$$X_2 = X^+ + X^- = 0.$$

В силу этого вопрос рассмотрения плоских задач отпадает.

Институт механики НАН РА

Р. М. Киракосян

Задачи ортотропных пластинок-полос при действии касательных поверхностных нагрузок

Решаются четыре задачи изгиба пластинки-полосы при действии касательных поверхностных нагрузок. Полученные аналитически замкнутые решения сравниваются с соответствующими решениями теории, которая не учитывает влияния изменения поперечных касательных напряжений по толщине пластинки. Делаются количественные и качественные заключения.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

Օրթոտրոպ սալ-շերտի խնդիրներ՝ մակերելութային շոշափող բեռների ազդեցության տակ

Լուծվում են սալ-շերտի չորս խնդիրներ, երբ սալը գտնվում է մակերելութային շոշափող բեռների ազդեցության տակ: Ստացած անալիտիկ փակ լուծումները համեմատվում են այն տեսության շրջանակներում ստացվող լուծումների հետ, որը հաշվի չի առնում սալի հաստությամբ ընդլայնական շոշափող լարումների փոփոխման վարքի ազդեցությունը: Կատարվում են քանակական եւ որակական եզրակացություններ:

R. M. Kirakosyan

**The Problems of Orthotropic Plate-Layer under
the Action of Thangential Surface Loading**

The four problems of orthotropic plate-layer under action of thangential surface loading is considered. The found analitical closed solutions was compared with solutions which corresponded to the theory[1].The quantitative and qualitative conclusions are made.

Литература

1. *Васильев В.В.* - Изв.РАН. Механика твердого тела. 1998. N3. С. 46-58.
2. *Киракосян Р.М.* - Прикладная механика. 2008. Т. 44. N4. С. 107-119.
3. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.