ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր 110 2010 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539.3:624.04

Л. А. Мовсисян

Об одном комбинированном способе сейсмозащиты (часть II)

(Представлено академиком Л.А. Агаловяном 17/XI 2009)

Ключевые слова: *вязкоупругое основание, случайная функция, математическое ожидание, дисперсия*

В первой части исследования [1] изучены вопросы изменения частоты системы (модель сооружения) при наличии многослойного основания и оптимальное управление ее движением с помощью внешних активных сил, при воздействии сейсмических сил. В настоящей работе эти вопросы рассматриваются в случае, когда один из материалов основания обладает свойством вязкости и сейсмическая сила носит случайный характер и заданы ее статистические данные.

1. Будем считать, что один из материалов основания обладает свойством вязкости, конкретно, подчиняется закону Фохта. Тогда при выводе формул, аналогичных (1.3) и (1.4)*, один из коэффициентов упругости должен быть заменен оператором, в частности, вместо G_2 должны брать $\tilde{G}_2 u = G_2\left(1+\mu\frac{\partial}{\partial t}\right)u$. Аналог уравнения (2.3) получим в следующих предположениях. Во-первых, так как коэффициент, характеризующий вязкость μ, число малое (можно сделать безразмерным), то принимается, что

$$\left[G_2\left(1+\mu\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]u^{-1} = G_2^{-1}\left(1-\mu\frac{\partial}{\partial t}\right)u. \quad (1.1)$$

Во-вторых, только ради краткости (уменьшения количества параметров) движением металлической части основания по сравнению с движением резиновой части (со

* Здесь и в дальнейшем нумерация формул, если не относится к данной статье, взята из [1].

свойством вязкости) пренебрегается. Дело в том, что модули сдвига каучука и металла отличаются на порядок $2\cdot10^3$. Тогда вместо (2.3) будем иметь

$$\alpha p t g p = 1 + i\beta p . \qquad (1.2)$$

Здесь $$\alpha = \frac{GH_2}{G_2 l},\ p = \frac{\omega l}{a},\ a^2 = \frac{G}{\rho},\ \beta = \mu\frac{a}{l}.$$

Обычно принимается, что $2\pi\mu\omega = \psi$, где ψ – количество поглощенной энергии за один цикл колебания, постоянно для данного материала.

Комплексные корни уравнения (1.2) $p = p_1 + ip_2$ дают значения величин частот свободных колебаний и коэффициентов затухания

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2,\ \omega_1 = \frac{a}{l}p_1,\ \omega_2 = \frac{a}{l}p_2 . \qquad (1.3)$$

Для случая, когда движение стержня характеризуется изгибом, вместо (2.7) будем иметь

$$\alpha p^3\left(chp\sin p + shp\cos p\right) = \left(1 + i\beta p^2\right)\left(1 + chp\cos p\right). \qquad (1.4)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{EJH_2}{G_2 F l^3},\ \ p^4 = \frac{\rho F}{EJ}\omega^2 l^4,\ \beta = \mu\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} .$$

При этом частоты и коэффициенты затухания определятся соответственно

$$\omega_1 = a\sqrt{\frac{J}{F}}\frac{p_1^2}{l^2},\ \omega_2 = 2a\sqrt{\frac{J}{F}}\frac{p_1 p_2}{l^2},\ a^2 = \frac{E}{\rho} . \qquad (1.5)$$

Заметим, что обычно коэффициент μ, характеризующий вязкость материала основания, малое число. Его влияние на колебательное движение уже рассматриваемого объекта невелико.

Покажем это для первого случая (1.2), когда движение стержня моделируется дискретными системами (впрочем, эти предположения не обязательные).

При сведении движения к системе одной степени свободы уравнение движения будет

$$m\ddot{x} + \tilde{k}x = 0 , \qquad (1.6)$$

где оператор $\tilde{k}$ определяется

$$\tilde{k}x = \frac{GG_2}{GH_2 + lG_1}\left[1 + \mu\left(1 - \frac{lG_2}{GH + lG_2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]x . \qquad (1.7)$$

Отсюда видно, что собственные частоты систем с учетом затухания или без учета (что приводится в [1]) будут незначительно отличаться. При свободных колебаниях интервал затухания для системы будет больше, чем в отдельности для основания.

2. Система уравнений движения исследуемого объекта имеет такой же вид, как (3.1), только C_{ij} надо заменить операторами

$$x_i = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{C}_{ij}\left[m_j\left(\ddot{x}_j - \ddot{x}_0\right) - F_j\right] \tag{2.1}$$

или

$$m_i\left(\ddot{x}_i - \ddot{x}_0\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j + F_i\,. \tag{2.2}$$

Получаемая при этом система будет содержать первые производные от x_i, но с различными коэффициентами для различных i и j.

Например, для $\tilde{a}_{ij}$ имеем (без наличия материала с G_1)

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{6EJG_2F}{C_1}\left(1 + \mu\dfrac{6EJH_2}{C_1}\dfrac{\partial}{\partial t}\right) & i \neq j, \\ \dfrac{3EJG_2F}{C_2}\left(1 + \mu\dfrac{3EJH_2}{C_2}\right) & i = j\,, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$C_1 = 6EJH_2 + j^2a^3\left(3j - i\right)FG_2\,,$$
$$C_2 = 3EJH_2 + j^3a^3FG_2$$

Системы (2.1) или (2.2) привести к каноническому виду не удается, поэтому целесообразнее ввести из определенных соображений, например, запаса прочности, некоторый приведенный коэффициент $\bar{\mu}\left(\tilde{C}_{ij} = C_{ij}\left(1 - \bar{\mu}\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\right)$, характеризующий вязкость.

При таком приближении вместо (3.6) будем иметь

$$\ddot{y}_k + \omega_k^2 y_k + \bar{\mu}\omega_k^2 \dot{y}_k = \Phi_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} C_{jk}\left(F_k - m_j\ddot{x}_0\right)}{\sum_{j=1}^{n} m_j C_{jk}^2}\,. \tag{2.4}$$

Таким образом, определяются формы колебаний и суммарная сила в точках сосредоточенных сил:

$$y_n=\frac{1}{\omega_k}\int_0^t e^{-\frac{\bar{\mu}}{2}\omega_k^2(t-\tau)}\Phi_k(\tau)\sin\omega_k'(t-\tau)d\tau ,$$

$$S_i=m_k\sum_{i,j=1}^{n}C_{ji}\omega_i'\eta_{ki}^{*}F_j\int_0^t\left(m_j\ddot{x}_0-F_j\right)e^{-\frac{\bar{\mu}}{2}\omega_k^2(t-\tau)}\sin\omega_k'(t-\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}C_{ij}\eta_{ki}^{*}F_j ,\quad \eta_{ki}=\frac{C_{ki}}{\sum_{q=1}^{n}C_{qi}^2m_q} \qquad (2.5)$$

При вычислении S_k помимо приведенной правой части в (3.5) появляется слагаемое от $\bar{\mu}$, но, как правило, оно отбрасывается как малое [2].

В предположении $\bar{\mu}\ll 1$ (что обычно имеет место) можно принять $\omega_k'=\omega_k$.

Задачи оптимального управления движением ставятся точно таким образом, как в [1,3]. Если внешнее воздействие имеет случайный характер (сейсмическая сила) и заданы его вероятностные характеристики (математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция), то характеристики множителей Лагранжа будут выражаться через них. Следовательно, оптимальные управляющие силы также будут выражаться через них.

Проиллюстрируем это для системы с одной степенью свободы. Так как нас интересует ход решения, примеры берутся самые простые.

3. Если движение стержня моделировать как систему с одной степенью свободы, где и приложена внешняя сосредоточенная сила F, то уравнением движения будет

$$M\left(\ddot{x}+\ddot{x}_0\right)+\tilde{k}x=F ,$$

$$\tilde{k}=k\left(1+\bar{\mu}\frac{\partial}{\partial t}\right) ,\quad k=\frac{3EJFG_2}{C_3} ,\quad \bar{\mu}=\frac{3EJH_2}{C_3} . \qquad (3.1)$$

$$C_3=3EJH_2+G_2Fl_1^3 ,$$

l_1 – точка приложения сосредоточенной массы (для жестко заделанной балки $l=0.63l$).

Решение уравнения (3.1) дает $(x=\dot{x}=0$ при $t=0)$

$$x(t)=\frac{1}{M\omega}\int_0^t e^{-n(t-\tau)}\left(F-M\ddot{x}_0\right)\sin\omega(t-\tau)d\tau ,$$

$$S=M\left(\ddot{x}+\ddot{x}_0\right)=F+\omega\int_0^t e^{-n(t-\tau)}\left(M\ddot{x}_0-F\right)\sin\omega(t-\tau)dt . \qquad (3.2)$$

Здесь $2n = \frac{k}{M}\bar{\mu} = \bar{\mu}\omega^2$, $\omega^2 = \frac{k}{M}$.

Соответственно с вероятностными данными относительно $\ddot{x}_0$ определятся и данные относительно множителей Лагранжа и управляющей функции.

Например, пусть случайное ускорение имеет вид

$$\ddot{x}_0 = Ae^{-at}, \tag{3.3}$$

где коэффициент A подчиняется закону распределения Рэлея [4], т.е. функция плотности

$$f(A) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} & , t \geq 0, \\ 0 & , t < 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Тогда математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция будут

$$\begin{aligned} m_{\ddot{x}_0} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma e^{-2t}, \quad D_{\ddot{x}_0} = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2 e^{-2at}, \\ K_{\ddot{x}_0} &= \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2 e^{-at} e^{-at'}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

При определении характеристик оптимальной силы в формулах (3.2) должны быть расставлены соответствующие величины из (3.5).

Для того чтобы в момент $t = T$ суммарная сила равнялась нулю $\left(S(t = T) = 0\right)$, определим необходимую активную силу [1]

$$F = -\frac{\lambda}{2} e^{nt} \sin\omega(T - t). \tag{3.6}$$

Для краткости записи здесь и в дальнейшем для T выбрано $\omega T = \pi$.

Множитель λ при этом

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{M_1}{M_2}, \quad M_1 = \xi \frac{\omega}{\omega^2 - (n-a)^2}\left[e^{(n-a)T} + 1\right], \\ M_2 &= \frac{1}{4n} \frac{\omega^2}{n^2 + \omega^2}\left(e^{2nT} - 1\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Для математического ожидания $\lambda(m_\lambda)$ вместо ξ должны брать $m_{\ddot{x}_0}$ из 3.5 , а D_λ - вместо ξ $D_{\ddot{x}_0}$ из (3.5).

Если сейсмическая сила производится в виде удара

$$\ddot{x}_0 = P\delta(t) \tag{3.8}$$

и при этом P подчиняется нормальному закону распределения с $m_p = p$ и $D_p = \sigma^2$, то в параметре λ из (3.7)

$$M_1 = \xi\omega M e^{-nT_1}\sin\omega T_1 \qquad (0 < T_1 < T) \tag{3.9}$$

и в m_λ вместо ξ должны брать p, а $D_\lambda - \sigma^2$.

Второй тип задачи: в момент $t = T$ перемещение x и скорость $\dot{x}$ должны быть равны нулю. Тогда управляющая функция имеет вид

$$2F + e^{nt}\left(\lambda_1\cos\omega t + \lambda_2\sin\omega t\right) = 0. \tag{3.10}$$

Если предположить, что $\ddot{x}$ имеет вид (3.8), то условия $x(T) = \dot{x}(T) = 0$ дают

$$\lambda_1 = \frac{1}{C_4}\left(nA_1 + \omega A_2\right),\ \lambda_2 = \frac{1}{C_4}\left[\left(\omega + \frac{2n^2}{\omega}\right)A_1 + nA_2\right]$$

$$C_4 = \frac{1}{8}\frac{\omega\left(e^{2nT} - 1\right)}{n\left(n^2 + \omega^2\right)},\quad A_1 = \xi M e^{nT_1}\sin\omega T_1, \tag{3.11}$$

$$A_2 = \xi M e^{nT_1}\cos\omega T_1$$

Если предположить, что P подчиняется равномерному распределению $(P_1 \le P \le P_2)$, то вероятностные данные λ_i из (3.10) и (3.11) соответственно для математического ожидания и дисперсии получим, положив $\xi = \frac{P_1 + P_2}{2}$ в первом случае и $\xi = \frac{\left(P_2 - P_1\right)^2}{12}$ во втором.

Институт механики НАН РА

Л. А. Мовсисян

Об одном комбинированном способе сейсмозащиты (часть II)

Рассматривается случай, когда один из материалов основания обладает вязкоупругим свойством и внешние воздействия имеют случайный характер.

Լ. Ա. Մովսիսյան

Սեյսմապաշտպանության համակցված մի եղանակի մասին (II մաս)

Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ հիմքի նյութերից մեկը օժտված է առաձգամածուցիկությամբ, եւ արտաքին ազդեցությունները ունեն պատահական բնույթ։

L. A. Movsisyan

On One Combined Method of Seismoprotection (part II)

The case, where one of the fundament materials has viscoelastic behaviour and external forces have stoexastic character is investigated.

Литература

1. *Мовсисян Л.А.* –ДНАН РА. 2009. N2. С. 137-144.

2. *Хачиян Э.Е.* Сейсмические воздействия на высотные здания и сооружения Ереван. Айастан. 1973. 327 с.

3. *Мовсисян Л.А., Габриелян М.С.* В сб.: Вопросы оптимального управления. устойчивости и прочности механических систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1997. С. 67-71.

4. *Светлицкий В.А.* Случайные колебания механических систем. М. Машиностроение. 1976. 215 с.