

УДК 539.1

Академик Д. М. Седракян, Л. Р. Седракян

О волновых функциях при двухканальном рассеянии

(Представлено 8/II 2010)

Ключевые слова: *двухканальное рассеяние, волновая функция*

1. Введение. В [1] рассмотрено рассеяние частицы на потенциале:

$V(x, y) = V(x)V(y)$, где

$$V(x) = \begin{cases} K & a \leq x \leq b \\ 0 & a \geq x \geq b \end{cases}$$

а $V(y)$ – произвольная функция от y , которая удовлетворяет условию $V(0) = V(c) = \infty$. Получены амплитуды прохождения T_1, T_2 и отражения R_1, R_2 по двум каналам рассеяния соответственно. Ниже мы предполагаем, что эти амплитуды заданы. Как показано в [2,3], для нахождения волновой функции частицы $\Psi(x, y)$, которая является решением уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x, y) + (\chi^2 - V(x, y)) \Psi(x, y) = 0, \quad (1)$$

где

$$\frac{2M}{\hbar^2} E = \chi^2, \quad \frac{2M}{\hbar^2} U(x, y) = V(x, y),$$

ее ищут в виде

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x) \Phi_n(y), \quad (2a)$$

где

$$\Phi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n}{a} y, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

В случае двухканального рассеяния n принимает два значения: $n = 1$ и $n = 2$, тогда волновая функция (2 а) принимает вид

$$\Psi(x, y) = \Psi_1(x)\Phi_1(y) + \Psi_2(x)\Phi_2(y). \quad (3)$$

Как уже было отмечено, функции $\Phi_1(y)$ и $\Phi_2(y)$ определены формулами (2 б), а искомые функции $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ являются решениями системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi_1(x)}{dx^2} + q_1^2 \Psi_1(x) - V_{12} \Psi_2(x) &= 0, \\ \frac{d^2 \Psi_2(x)}{dx^2} + q_2^2 \Psi_2(x) - V_{12} \Psi_1(x) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} q_1^2 &= k_1^2 - V_{11}, \quad q_2^2 = k_2^2 - V_{22}, \\ k_1^2 &= \chi^2 - \chi_1^2, \quad k_2^2 = \chi^2 - \chi_2^2, \quad \chi_m = \frac{\pi}{a} m \quad m = 1, 2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$V_{mn}(x) = \int_0^c \Phi_m(y) V(x, y) \Phi_n(y) dy \quad m = 1, 2.$$

Определение волновой функции $\Psi(x, y)$ важно для рассмотрения задачи взаимодействия электрона, движущегося при заданном потенциале, с электромагнитной волной. Взаимодействие электрона с электромагнитной волной, при наличии двух каналов рассеяния, может привести к когерентному усилению или поглощению волны, когда энергия фотона $\hbar\omega$ близка к энергии $\Delta E = \frac{\hbar^2(\chi_2^2 - \chi_1^2)}{2M}$.

Для исследования этих проблем сначала нужно определить нормированную волновую функцию $\Psi(x, y)$ во всем интервале взаимодействия.

Цель данной статьи – определить эту функцию. В § 2 определен вид этой функции в интервалах $-\infty < x < a$, $a \leq x \leq b$ и $b < x < \infty$. В § 3 для определения волновых функций производится сшивка волновых функций в точках $x = a$ и $x = b$. В конце этого параграфа производится нормировка функции $\Psi(x, y)$ и находится ее окончательное выражение.

2. Волновая функция $\Psi(x, y)$ в разных интервалах по x . Как уже было отмечено, волновая функция $\Psi(x, y)$ имеет вид (3). Входящие в них функции $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ в интервале $-\infty < x < a$ должны иметь вид:

$$\begin{aligned}\Psi_1^{(1)}(x) &= e^{ik_1 x} + R_1 e^{-ik_1 x}, \\ \Psi_2^{(1)}(x) &= R_2 e^{-ik_2 x},\end{aligned}\quad (6)$$

Вид этих функций в интервале $b < x < \infty$ также можно записать сразу:

$$\Psi_1^{(3)}(x) = T_1 e^{ik_1 x}, \quad \Psi_2^{(3)}(x) = T_2 e^{ik_1 x}. \quad (7)$$

Входящие в решения (6) и (7) коэффициенты R_1, R_2 и T_1, T_2 являются амплитудами отражения и прохождения и найдены в работе [1].

Для нахождения функций $\Psi_1^{(2)}(x)$ и $\Psi_2^{(2)}(x)$ в интервале $a \leq x \leq b$ мы должны решить систему уравнений (4). Эти уравнения являются системой линейных уравнений с постоянными коэффициентами, поэтому их решения можно искать в виде

$$\Psi_1^{(2)}(x) = \sum_i A_{1i} e^{ip_i x} \text{ и } \Psi_2^{(2)}(x) = \sum_i A_{2i} e^{ip_i x}, \quad (8)$$

где A_{1i} , A_{2i} и p_i определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}(-p^2 + q_1^2) A_{1i} - V_{12} A_{2i} &= 0, \\ -V_{12} A_{1i} + (-p^2 + q_2^2) A_{2i} &= 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Чтобы эта система уравнений имела отличное от нуля решение, необходимо выполнение условия

$$(p^2 - q_1^2)(p^2 - q_2^2) - V_{12}^2 = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) определяет корни p_i , которые входят в решение (8). При выполнении условия (10) из системы уравнений (9) остается одно уравнение, которое и связывает коэффициенты A_{2i} с соответствующими коэффициентами A_{1i} .

Эта связь имеет вид

$$A_{2i} = \frac{q_1^2 - p_i^2}{V_{12}} A_{1i}. \quad (11)$$

Уравнение (10) имеет четыре решения $\pm p_1$ и $\pm p_2$, где

$$\begin{aligned}p_1^2 &= \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} + \frac{q_1^2 - q_2^2}{2} \delta = \frac{q_1^2}{2}(1 + \delta) + \frac{q_2^2}{2}(1 - \delta), \\ p_2^2 &= \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} - \frac{q_1^2 - q_2^2}{2} \delta = \frac{q_1^2}{2}(1 - \delta) + \frac{q_2^2}{2}(1 + \delta),\end{aligned}\quad (12)$$

где

$$\delta = \sqrt{1 + \left(\frac{2V_{12}}{q_1^2 - q_2^2} \right)^2}. \quad (13)$$

Таким образом, искомую функцию $\Psi_1^{(2)}(x)$ можно представить в следующем виде:

$$\Psi_1^{(2)}(x) = Ae^{ip_1(x-a)} + Be^{ip_2(x-a)} + Ce^{-ip_1(x-a)} + De^{-ip_2(x-a)}, \quad (14)$$

где введены обозначения $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$ и $A_4 = D$. Используя уравнения (11), искомую функцию $\Psi_2^{(2)}(x)$ можно записать в следующем виде:

$$\Psi_2^{(2)}(x) = \frac{q_1^2 - p_1^2}{V_{12}} \left(Ae^{ip_1(x-a)} + Ce^{-ip_1(x-a)} \right) + \frac{q_1^2 - p_2^2}{V_{12}} \left(Be^{ip_2(x-a)} + De^{-ip_2(x-a)} \right). \quad (15)$$

Итак, формулы (6), (7), (14) и (15) определяют искомые функции $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ в разных интервалах определения по x . Фактически мы нашли вид волновой функции $\Psi(x, y)$ в этих трех интервалах по x с точностью пока неизвестных постоянных A , B , C и D . Эти постоянные определяются из непрерывности функций $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ в точках $x=a$ и $x=b$. Отметим, что непрерывность производных этих функций по x в точках $x=a$ и $x=b$ выполняется автоматически, так как в интервалах $-\infty < x < a$ и $b < x < \infty$ мы выбрали эти функции в виде (6) и (7) соответственно [4,5].

3. Нахождение искомых постоянных A, B, C, D . Требование непрерывности функций $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ в точках $x=a$ и $x=b$ приведет к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} (A+C) + (B+D) &= e^{ik_1a} + R_1 e^{-ik_1a}, \\ \frac{q_1^2 - p_1^2}{V_{12}} (A+C) + \frac{q_1^2 - p_2^2}{V_{12}} (B+D) &= R_2 e^{-ik_2a}, \\ (Ae^{ip_1d} + Ce^{-ip_1d}) + (Be^{ip_2d} + De^{-ip_2d}) &= T_1 e^{ik_1b}, \\ \frac{q_1^2 - p_1^2}{V_{12}} (Ae^{ip_1d} + Ce^{-ip_1d}) + \frac{q_1^2 - p_2^2}{V_{12}} (Be^{ip_2d} + De^{-ip_2d}) &= T_2 e^{ik_2b}. \end{aligned} \quad (16)$$

Это система линейных уравнений для A, B, C и D , и ее решение простое. Расчет сводится к определению разных детерминантов четвертого порядка. A, B, C и D являются разными отношениями этих детерминантов. Расчет довольно громоздкий, поэтому сразу напишем полученные результаты:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{i \left[\theta_2 e^{ik_1 a - ip_1 d} + \theta_2 R_1 e^{-ik_1 a - ip_1 d} - R_2 e^{-ik_2 a - ip_1 d} + T_1 \theta_2 e^{ik_1 b} + T_2 e^{ik_2 b} \right]}{2(\theta_2 - \theta_1) \sin p_1 d}, \\
C &= \frac{i \left[R_2 e^{-ik_2 a + ip_1 d} - \theta_2 e^{ik_2 a + ip_2 d} - \theta_2 R_1 e^{-ik_1 a + ip_1 d} + T_1 \theta_2 e^{ik_1 b} - T_2 e^{ik_2 b} \right]}{2(\theta_2 - \theta_1) \sin p_1 d}, \\
B &= \frac{i \left[R_2 e^{-ik_1 a - ip_2 d} - \theta_1 e^{ik_1 a - ip_2 d} - \theta_1 R_1 e^{-ik_1 a - ip_2 d} + \theta_1 T_1 e^{ik_1 b} - T_2 e^{ik_2 b} \right]}{2(\theta_2 - \theta_1) \sin p_2 d}, \\
D &= \frac{i \left[\theta_1 e^{ik_1 a + ip_2 d} + \theta_1 R_1 e^{-ik_1 a + ip_2 d} - R_2 e^{-ik_2 a + ip_2 d} - \theta_1 T_1 e^{ik_1 b} + T_2 e^{ik_2 b} \right]}{2(\theta_2 - \theta_1) \sin p_2 d},
\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\theta_1 = \frac{q_1^2 - p_1^2}{V_{12}}, \quad \theta_2 = \frac{q_1^2 - p_2^2}{V_{12}}.$$

Подставив выражения постоянных A , B , C и D в формулы (14) и (15), для искомых функций $\Psi_1^{(2)}(x)$ и $\Psi_2^{(2)}(x)$ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\Psi_1^{(2)}(x) &= - \frac{\theta_2 e^{ik_1 a} + \theta_2 R_1 e^{-ik_1 a} - R_2 e^{-ik_2 a}}{\theta_2 - \theta_1} \frac{\sin p_1 (x - a - d)}{\sin p_1 d} + \\
&+ \frac{\theta_1 e^{ik_1 a} + \theta_1 R_1 e^{-ik_1 a} - R_2 e^{-ik_2 a}}{\theta_2 - \theta_1} \frac{\sin p_2 (x - a - d)}{\sin p_1 d} - \\
&- \frac{T_2 e^{ik_2 b} - \theta_2 T_1 e^{ik_1 b}}{\theta_2 - \theta_1} \frac{\sin p_1 (x - a)}{\sin p_1 d} + \frac{T_2 e^{ik_2 b} - \theta_1 T_1 e^{ik_1 b}}{\theta_2 - \theta_1} \frac{\sin p_2 (x - a)}{\sin p_2 d},
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_2^{(2)}(x) &= - \frac{\theta_2 \theta_1 e^{ik_1 a} + \theta_2 \theta_1 e^{-ik_1 a} - \theta_1 R_2 e^{-ik_2 a}}{\theta_2 - \theta_1} \frac{\sin p_1 (x - a - d)}{\sin p_1 d} + \\
&+ \frac{\theta_2 \theta_1 e^{ik_1 a} + \theta_2 \theta_1 R_1 e^{-ik_2 a} - \theta_2 R_2 e^{-ik_2 a}}{\theta_2 - \theta_1} \frac{\sin p_2 (x - a - d)}{\sin p_2 d} - \\
&- \frac{\theta_1 T_2 e^{ik_2 b} - \theta_1 \theta_2 T_1 e^{ik_1 b}}{\theta_2 - \theta_1} \frac{\sin p_1 (x - a)}{\sin p_1 d} + \frac{\theta_2 T_2 e^{ik_2 b} - \theta_1 \theta_2 T_1 e^{ik_1 b}}{\theta_2 - \theta_1} \frac{\sin p_2 (x - a)}{\sin p_2 d}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Подставив выражение для $\Psi_1^{(2)}(x)$ и $\Psi_2^{(2)}(x)$ в формулу (3), определим волновую функцию $\Psi(x, y)$ в интервале $a \leq x \leq b$. Волновую функцию в интервалах $-\infty < x < a$ и $b < x < \infty$ найдем, если в формулу (3) подставим вместо $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ их выражения (6) и (7) соответственно. Найденная таким образом волновая функция $\Psi(x, y)$ не нормирована. Легко видеть, что функцию $\Psi(x, y)$ можно умножить на

произвольную постоянную M , и она снова останется решением системы уравнений (4).

Так как движение частицы по x не ограничено, то условие нормировки волновой функции должно иметь вид $\int_0^a dy \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, y)|^2 dx = \infty$. Однако волновую функцию можно нормировать на единицу, если место нахождения частицы по направлению x ограничить величиной $2L$ и требовать, чтобы

$$\frac{1}{2L} \int_0^a dy \int_{-L}^L |\Psi(x, y)|^2 dx = 1. \quad (20)$$

где L может быть сколь угодно большим. Подставляя плотность вероятности

$$|\Psi|^2 = (\Psi_1^*(x)\Phi_1(y) + \Psi_2^*(x)\Phi_2(y))(\Psi_1(x)\Phi_1(y) + \Psi_2(x)\Phi_2(y)) \quad (21)$$

в условие (3.5), можно написать

$$\frac{M^2}{2L} \left[(1 + |R_1|^2 + |R_2|^2) L \left(1 + \frac{a}{L} \right) + (|T_1|^2 + |T_2|^2) L \left(1 - \frac{b}{L} \right) + F \right] = 1,$$

где F – конечная величина. При стремлении L к бесконечности окончательно получим

$$M = \left(\frac{2}{1 + |R_1|^2 + |R_2|^2 + |T_1|^2 + |T_2|^2} \right)^{1/2}.$$

Итак, мы определили волновую функцию $\Psi(x, y)$ во всем интервале ее определения: $-\infty \leq x \leq \infty$ и $0 \leq y \leq a$.

Ереванский государственный университет

Академик Д. М. Седракян, Л. Р. Седракян

О волновых функциях при двухканальном рассеянии

Для случая двухканального рассеяния построены стационарные двумерные волновые функции рассеивающейся частицы. Волновые функции построены в трех интервалах по x : в областях отражения и прохождения, а также в области отличного от нуля внешнего потенциала. В конце проведена нормировка полной волновой функции $\Psi(x, y)$.

Wave Functions in the Case of Two-Channel Scattering

Steady state two-dimensional wave functions are built in the case of two-channel scattering. Wave functions are built in three intervals by x : in the range of reflection and transmission, and also in the range of non-zero potential. Finally normalization of complete wave function $\Psi(x, y)$ is done.

Ակադեմիկոս Դ. Մ. Սեդրակյան, Լ. Ռ. Սեդրակյան

Ալիքային ֆունկցիաները երկուդի ցրման դեպքում

Ցրվող մասնիկի ստացիոնար երկչափ ալիքային ֆունկցիաները կառուցված են երկուդի ցրման դեպքում: Ալիքային ֆունկցիաները կառուցված են երեք տիրույթներում՝ անդրադարձման, անցման և զրոյից տարբեր արտաքին պոտենցիալի: Վերջում անց է կացվում լրիվ $\Psi(x, y)$ ալիքային ֆունկցիայի նորմավորումը:

Литература

1. Седракан Д. М., Казарян Э. М., Седракан Л. Р. - Изв. НАН Армении. Физика. 2010. Т. 45. N 3. С. 173-182.
2. Седракан Д. М., Казарян Э. М., Седракан Л. Р. - Изв. НАН Армении. Физика. 2009. Т. 44. N 6. С. 395-404.
3. Седракан Л.Р. - ДНАН Армении. 2009. Т. 109. С. 214.
4. Седракан Д. М., Хачатрян А. Ж., Казарян Э. М., Седракан Л. Р. - Изв. НАН Армении. Физика. 2009. Т. 44. N 3. С. 167-175.
5. Седракан Д. М., Хачатрян А. Ж. - Изв. НАН Армении. Физика. 1999. Т. 34. С. 138-144.