

УДК 539.1

Член-корреспондент НАН РА А. Г. Багдоев<sup>1</sup>, А. Н. Мартirosян<sup>2</sup>,  
А. С. Дивунц<sup>2</sup>, А. В. Давтян<sup>2</sup>

### Исследование задачи о залечивании трещины в термоупругой среде

(Представлено 16/IX 2009)

**Ключевые слова:** уравнение Винера – Хопфа, смешанная граничная задача, биологические трещины, залечивание

Рассматриваются задачи о наращивании слоя примесей, содержащихся в жидкости (флюиде), поступающей в трещину в бесконечной термоупругой плоскости. В [1] такие задачи решались для геофизической среды без учета термоупругих напряжений, и залечивание трещины за счет примесей было рассчитано с помощью градиента температуры с учетом термодиффузии и теплопроводности. В настоящей статье основное внимание уделяется эффектам термодиффузии и термоупругости в среде. При некоторых упрощающих предположениях относительно характера влияния диффузии примесей на залечивание трещины решена нестационарная задача термоупругости при смешанных граничных условиях на границе трещины с учетом наращивания среды на границе за счет осаждения примесей. Вопросы захлопывания жидко-твердой бесконечной полосы, ограниченной полуплоскостями твердой упругой среды, рассмотрены в [2], где обсуждаются действия вертикальных нагрузок на эту систему и приводятся эмпирические зависимости вертикального смещения от координат вдоль оси.

**1. Постановка общей задачи о трещине при наличии потока жидкости.** Особое внимание сосредоточено на простой и практически наиболее реальной задаче, когда касательные напряжения вдоль оси и нормальное перемещение равны нулю и дано вычисление величины захлопывания трещины со временем. Такие задачи особенно важны для изучения влияния конформационных

кристаллитов в масле на процессы в промышленных технических задачах [3] и в аналогичных задачах о залечивании биологических трещин [4,5].

Жидкость (флюид) при  $t = 0$  поступает в трещину, которая вначале представляет полуполосу  $x > 0$  малой толщины  $2b_1$ , причем в силу симметрии уравнение трещины в момент  $t$  будет  $y = \pm b_1(x, t)$ ,  $b_1(x, t) = b_0 + V_y(x, t)$ ,  $y \approx 0$ . В дальнейшем выбирается только верхний знак. Тогда в линейном приближении можно, следуя [1, 6], записать приближенное соотношение при  $y = 0$

$$\rho_s \frac{\partial b_1}{\partial t} = q\gamma \frac{\partial T}{\partial x} - K\sigma_{yy} - i_0 H(x)H(t), \quad (1.1)$$

где левая часть представляет массу осадка, выпавшего в единицу времени и пропорционального скорости залечивания трещины, первое слагаемое правой части — плотность потока массы вдоль оси  $y$  [1] растворенного компонента, переданная раствором в единицу времени за счет градиента температуры по  $x$ , второе слагаемое — трибологический член [6], где  $K = \text{const}$  — экспериментальная постоянная,  $\rho_s$  — плотность выпавшего осадка,  $c$  — концентрация примесей в жидкости,  $\gamma = \frac{\partial c}{\partial T}$ ,  $\gamma = \text{const}$  [1,7], в линейном приближении,  $q_y \approx i_0$  — плотность диффузионного потока по оси  $y$ , взятая такой же, как в начальном сечении  $x = 0$ ,  $q = \rho_j \nu b_0$ ,  $\nu$  — скорость флюида,  $\rho_j$  — плотность жидкости; слагаемое в граничном условии, содержащее  $i_0$ , соответствует имеющей место при входе флюида в трещину плотности потока концентрации примесей по оси  $y$ .

Рассматривается задача о движении термоупругой среды, занимающей плоскость  $x, y$  с трещиной, ось которой  $y = 0$ ,  $0 < x < \infty$ . Внутри трещины имеется движение жидкости с примесями, концентрация которых  $c(x, t) = \bar{c}_0 + c(x, t)$ ,  $\bar{c}_0 = \text{const}$  начальная концентрация, зависящая от температуры  $T_0 = \text{const}$ ,  $\gamma = \frac{\partial \bar{c}_0}{\partial T_0}$  также постоянная, плотность осадков в жидкости  $\rho_s$ . При поступлении жидкости в трещину за счет ее охлаждения происходит и выпадение осадков, что приводит к залечиванию трещины, т. е. уменьшению ее ширины  $b_1(x, t) = b_0 + U_y(x, 0, t)$  [1], где  $U_x, U_y$  есть компоненты перемещений термоупругой среды. Уравнение трещины  $y = b_0 + U_y(x, 0t)$ ,  $0 < x < \infty$ .

Следует поставить и решать линейную задачу для термоупругой среды, уравнения движения которой

$$\begin{aligned} a^2 \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} + \bar{\delta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}, \\ a^2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + b^2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} + \bar{\delta} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\bar{\delta} = \frac{K_4 C_p - C_v}{\rho C_v}$ ,  $K_4 = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  — объемный модуль,  $\rho$  — плотность упругой среды,  $C_p, C_v$  — теплоемкости.

Компоненты напряжения  $\sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  берутся из закона Гука для термоупругости с учетом (1.4)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{yy}}{\rho} &= (a^2 - 2b^2) \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) + 2b^2 \frac{\partial U_y}{\partial y} + \bar{\delta} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \right), \\ \frac{\sigma_{xy}}{\rho} &= b^2 \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для разности температур  $T(x, y, t) - T_0$ , где  $T_0$  есть постоянная начальная температура среды, предположено, что она одинакова в упругой среде и жидкости, поэтому приближенно считается  $y \approx 0$  и обозначается  $T(x, t) = T(x, 0, t) - T_0$ . При этом для термоупругой среды имеется использованное в (1.1) приближенное соотношение

$$T - T_0 = -\frac{C_p - C_v}{\alpha C_v} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \right), \quad (1.4)$$

которое получено без учета теплопроводности в уравнении для температуры

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_p - C_v}{\alpha C_v} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} a^2 \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} + \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}, \\ a^2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} + \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\gamma_1 = -\alpha \frac{\lambda + \frac{2}{3}\mu}{\rho},$$

где  $\alpha$  — коэффициент температуропроводности. В общем случае к (1.6) следует добавить уравнение диффузии для концентрации. Для жидкости внутри трещины  $|y| \leq b(x, t)$  можно также использовать уравнения движения термодиффузии. В целях упрощения принимается указанное единство температур в термоупругой среде и жидкости. Тогда для жидкости можно записать уравнение для концентрации примесей с учетом термодиффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nu_0 \frac{\partial c}{\partial x} = D \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( c + \frac{K_T}{T_0} f \right), \quad f = T(x, 0, t). \quad (1.7)$$

Граничные условия контакта среды и жидкости после линеаризации [1], с учетом также механического наращивания будут при  $y = 0$

$$\rho_s \frac{\partial U_y}{\partial t} = q \gamma \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y=0} \lambda_1 \frac{\partial c}{\partial y} - K \sigma_{yy}, \quad \frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{K_1}{\rho_s} \sigma_{xy}, \quad x > 0, \quad (1.8)$$

где  $q = \nu_0 b_0$  — исходный поток жидкости,  $\lambda_1 = -\rho_s D$ ,  $\rho_s$  — плотность примесей, взятая на границе трещины,  $D$  — коэффициент диффузии,  $K$

— трибологическая постоянная границы трещины или наращивания ее поверхности, куда можно приближенно включить и слагаемое от бародиффузии, полагая  $\sigma_{yy} = -P$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} \approx -\frac{\sigma_{yy}}{b_0}$  и обозначая  $K_1$  коэффициент горизонтального износа среды. Кроме того условия ставятся лишь на верхней границе трещины в силу симметрии, когда при  $y = 0$ ,  $x < 0$   $U_y = 0$ ,  $\sigma_{xy} = 0$ .

Для полной формулировки задачи (1.7), (1.8) в термоупругой среде, т. е. при  $y > 0$ , следует решать эти уравнения совместно с (1.7), дополняя граничными условиями при  $y = 0$  для  $T$  и  $s$  [1]. Чтобы не загромождать решение и облегчить обратное преобразование по Лапласу по  $t$ , можно, взяв упрощение (1.4), решать (1.2) и (1.8), в котором приближенно  $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T - T_0}{l}$ , где  $l$  — характерная средняя длина вдоль трещины. Диффузионный поток  $\lambda_1 \frac{\partial c}{\partial y}$  приближенно считается известным и равным  $-i_0 H(x) H(t)$ ,  $i_0 = \text{const}$ , значению во входном сечении трещины. Уравнение диффузии при этом не используется, а заменяется предположением о примерно постоянном диффузионном потоке твердых примесей в жидкости к трещине. Граничные условия дают

$$\frac{\partial U_y}{\partial t} = -\frac{\rho C_p - C_v}{\rho_s \alpha C_v l} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) \nu_0 b_0 \gamma - i_0 H(x) H(t) - \frac{K \sigma_{yy}}{\rho_s}, \quad (1.9)$$

$$Y = 0, \quad x > 0, \quad \frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{K_1}{\rho_s} \sigma_{xy},$$

где  $H(t) = 1$ ,  $t > 0$ ,  $H(t) = 0$ ,  $t < 0$ , есть единичная функция Хевисайда.

Задача (1.2), (1.9) для  $U_x$ ,  $U_y$  при  $y > 0$  является замкнутой. В общей постановке без пренебрежения теплопроводностью ее можно решать также и для случая осевой симметрии, характерного для многих биомеханических проблем.

**2. Решение задачи при наличии трения и наращивания примесей на границе трещины.** Уравнения термоупругости в перемещениях для изотропной среды в плоском случае имеют вид

$$\bar{a}^2 \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + (\bar{a}^2 - b^2) \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}, \quad \bar{a}^2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + b^2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + (\bar{a}^2 - b^2) \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

где  $(\bar{a}^2 = a^2 + \delta)$ .

Граничные условия на трещине ( $x > 0$ ) и вне ее ( $x < 0$ ) с учетом наращивания трещины за счет примесей в жидкости концентрации  $c$ ,  $\frac{\partial c}{\partial y} = \text{const}$ ,  $-i_0 = \rho D \frac{\partial c}{\partial y}$ , постоянного диффузионного потока примесей в жидкости,

имеют вид

$$\begin{cases} y = 0 \\ U_y = 0, \sigma_{xy} = 0, x < 0; \frac{\sigma_{xy}}{b^2 \rho} = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \\ \frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{K_1}{\rho_s} \sigma_{xy}, \frac{\partial U_y}{\partial t} = - \left\{ \frac{K(\bar{a}^2 - 2b^2)\rho}{\rho_s} + \xi \right\} \frac{\partial U_x}{\partial x} - \\ - \left( \frac{K\bar{a}^2\rho}{\rho_s} + \xi \right) \frac{\partial U_y}{\partial y} - \frac{i_0}{\rho_s} H(x)H(t), x > 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $\xi = \frac{c_p - c_v}{c_v l} \frac{\nu_0 b_0 \gamma \rho}{\alpha \rho_s}$ ; при этом учтено уравнение наращивания  $\frac{\partial U_y^*}{\partial t} = \frac{K}{\rho_s} \sigma_{xy}$ .

Начальные условия нулевые:  $U_x = \frac{\partial U_x}{\partial t} = 0, U_y = \frac{\partial U_y}{\partial t} = 0$ . Обозначим  $U_x = U, U_y = V$ .

Решение ищется методом интегральных преобразований Лапласа по  $t$  и Фурье по  $x$ . Обозначив через  $\bar{U}, \bar{V}$  преобразования Лапласа по  $t$  от  $U, V$  и через  $\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{V}}$  — преобразование Фурье по  $x$  от  $\bar{U}, \bar{V}$ , можно записать

$$\bar{U}; \bar{V} = \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\alpha}x + i\bar{\beta}_n y} \bar{\bar{U}}_n; \bar{\bar{V}}_n d\bar{\alpha}, \bar{\beta}_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2} - \bar{\alpha}^2}, c_1 = \bar{a}, c_2 = b, \quad (2.3)$$

где  $s = -i\omega$ , через  $s$  обозначается параметр преобразования Лапласа. Кроме того

$$\bar{\bar{V}}_1 = \frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\alpha}} \bar{\bar{U}}_1, \bar{\bar{V}}_2 = -\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}_2} \bar{\bar{U}}_2, \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) в (2.2) и обращая преобразование Фурье по  $x$ , можно получить

$$\bar{\bar{V}}_1 + \bar{\bar{V}}_2 = V^-, \rho b^2 i (\bar{\beta}_1 \bar{\bar{U}}_1 + \bar{\beta}_2 \bar{\bar{U}}_2 + \bar{\alpha} V^-) = \sigma_{xy}^- \quad (2.5)$$

$$s(\bar{\bar{U}}_1 + \bar{\bar{U}}_2) = \frac{K_1}{\rho_s} \sigma_{xy}^- + \Omega_1^+, s(\bar{\bar{V}}_1 + \bar{\bar{V}}_2) = -K_2 i \bar{\alpha} (\bar{\bar{U}}_1 + \bar{\bar{U}}_2) - \\ - K_3 (i \bar{\beta}_1 \bar{\bar{V}}_1 + i \bar{\beta}_2 \bar{\bar{V}}_2) - \frac{i_0}{2\pi i \bar{\alpha} s \rho_s} + \Omega_2^+,$$

где  $\Omega_1^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 (\bar{U}_1 + \bar{U}_2)|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx, \Omega_2^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 (\bar{V}_1 + \bar{V}_2)|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx, \sigma_{xy}^- =$

$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \bar{\sigma}_{xy}|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx, V^- = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \bar{V}|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx, K_2 = \frac{K(\bar{a}^2 - 2b^2)\rho}{\rho_s} + \xi, K_3 = \frac{K\bar{a}^2\rho}{\rho_s} + \xi,$

индексом (+) обозначены функции, аналитические в верхней полуплоскости  $\bar{\alpha}$ , а индексом (-) — функции, аналитические в нижней полуплоскости.

Подставляя (2.4) в (2.5), получим систему уравнений Винера — Хопфа

$$a_{11} \sigma_{xy}^- + a_{12} V^- \bar{\beta}_1 = \Omega_1^+,$$

$$a_{21}\sigma_{xy}^- + a_{22}V^-\bar{\beta}_1 + g_0 = \frac{\Omega_2^+}{\beta_1^+} \quad (2.6)$$

$$a_{11} = \frac{s(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}_1\bar{\beta}_2)}{i\omega^2\rho\bar{\beta}_1} - \frac{K_1}{\rho_s}, \quad a_{12} = \frac{s\bar{\alpha}b^2(\frac{\omega^2}{b^2} - 2\bar{\alpha}^2 - 2\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2)}{\omega^2\bar{\beta}_1\beta_1^-},$$

$$a_{21} = \frac{K_2\bar{\alpha}(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}_1\bar{\beta}_2)}{\omega^2\rho\bar{\beta}_1\beta_1^+} + \frac{K_3\bar{\alpha}(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2)}{\omega^2\rho\beta_1^+},$$

$$a_{22} = \frac{s}{\bar{\beta}_1} + \frac{i\bar{\alpha}^2 K_2 b^2 (\frac{\omega^2}{b^2} - 2\bar{\alpha}^2 - 2\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2)}{\omega^2\bar{\beta}_1^2} + \frac{iK_3 b^2 (\bar{\beta}_1 (\frac{\omega^2}{b^2} - 2\bar{\alpha}^2) + 2\bar{\alpha}^2\bar{\beta}_2)}{\omega^2\bar{\beta}_1}, \quad g_0 = \frac{i_0}{2\pi i\bar{\alpha}s\rho_s\beta_1^+}$$

где использована факторизация  $\bar{\beta}_1 = \beta_1^- \beta_1^+$ .

Систему (2.6) Винера – Хопфа можно привести к задаче Гильберта

$$\Phi^+(\bar{\alpha}) = G(\bar{\alpha})\Phi^-(\bar{\alpha}) + g(\bar{\alpha}) \quad (2.7)$$

$$G(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \Phi^+(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} \Omega_1^+ \\ \frac{\Omega_2^+}{\beta_1^+} \end{pmatrix}, \quad \Phi^-(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xy}^- \\ V^-\bar{\beta}_1 \end{pmatrix}, \quad g(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_0 \end{pmatrix}$$

при  $|\bar{\alpha}| \approx \infty$   $a_{11} = -\frac{K_1}{\rho_s}$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{21} = 0$ ,

$$a_{22} = \frac{(K_2 + K_3)ib^2}{\bar{\alpha}^2}, \quad (2.8)$$

Решение задачи (2.7), ограниченное на бесконечности, дано в [8] в виде

$$\Phi(\bar{\alpha}) = \frac{X(\bar{\alpha})}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[X^+(\bar{\zeta})]^{-1}g(\bar{\zeta})d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}}, \quad (2.9)$$

где матрица-функция  $X(\bar{\alpha})$  удовлетворяет однородным уравнениям

$$X^+(\bar{\alpha}) = G(\bar{\alpha})X^-(\bar{\alpha}), \quad G(\bar{\alpha}) = X^+(\bar{\alpha})[X^-(\bar{\alpha})]^{-1}. \quad (2.10)$$

Как показано в [5], уравнение для  $X(\bar{\alpha})$  можно записать в виде системы Фредгольма

$$X^-(\bar{\alpha}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^{-1}(\bar{\alpha})G(\bar{\zeta}) - E(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}} X^-(\bar{\zeta})d\bar{\zeta} = \gamma(\bar{\alpha}), \quad (2.11)$$

где  $\gamma(\bar{\alpha})$  есть асимптотическое поведение матрицы-функции  $X(\bar{\alpha})$  при  $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$ .

Уравнение (2.11) с учетом (2.7) имеет вид

$$X^-(\bar{\alpha}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} - E \right\} \begin{pmatrix} y_{11}(\bar{\zeta}) & y_{12}(\bar{\zeta}) \\ y_{21}(\bar{\zeta}) & y_{22}(\bar{\zeta}) \end{pmatrix}}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}} d\bar{\zeta} = \gamma(\bar{\alpha}), \quad (2.12)$$

где  $X^-(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} y_{11}(\bar{\alpha}) & y_{12}(\bar{\alpha}) \\ y_{21}(\bar{\alpha}) & y_{22}(\bar{\alpha}) \end{pmatrix}$ ,  $E$  — единичная матрица,

$$\begin{aligned} d(\bar{\alpha})c_{11} &= a_{22}(\bar{\alpha})a_{11}(\bar{\zeta}) - a_{12}(\bar{\alpha})a_{21}(\bar{\zeta}), & d(\bar{\alpha})c_{12} &= a_{22}(\bar{\alpha})a_{12}(\bar{\zeta}) - a_{12}(\bar{\alpha})a_{22}(\bar{\zeta}), \\ d(\bar{\alpha})c_{21} &= a_{11}(\bar{\alpha})a_{21}(\bar{\zeta}) - a_{21}(\bar{\alpha})a_{11}(\bar{\zeta}), & d(\bar{\alpha})c_{22} &= a_{11}(\bar{\alpha})a_{22}(\bar{\zeta}) - a_{21}(\bar{\alpha})a_{12}(\bar{\zeta}), \\ d(\bar{\alpha}) &= a_{11}(\bar{\alpha})a_{22}(\bar{\alpha}) - a_{12}(\bar{\alpha})a_{21}(\bar{\alpha}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Обозначим

$$X^+(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (2.14)$$

Как видно из формулы для  $G(\bar{\alpha})$  (2.7), при  $\alpha \approx \infty$

$$G^{-1}(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} -\frac{\rho_s}{K_1} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{(K_2 + K_3)ib^2} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

и можно считать, что в силу (2.10)

$$X^+(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^-(\bar{\alpha}) = G^{-1}(\bar{\alpha}).$$

При этом в (2.12)  $\gamma(\bar{\alpha}) \approx X^-(\bar{\alpha})$  дается формулой (2.15),  $\gamma(\bar{\alpha}) = \text{const}$ .

Тогда (2.12) и (2.14) дают, в частности, при  $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xy}^- \\ V^- \beta_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} -\frac{\rho_s}{K_1} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{(K_2 + K_3)ib^2} \end{pmatrix} X^+(\bar{\zeta}) g(\bar{\zeta}) \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}}, \quad (2.16)$$

где  $X^-(\bar{\alpha})$  дается (2.15).

Переходя к обратным преобразованиям Лапласа и Фурье, при  $y = 0$ ,  $\tau \rightarrow 0$  получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{xy} = \text{Re} \frac{i_0}{2\pi^2 \sqrt{i} \Gamma(\frac{1}{2}) K_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} \frac{x_{12}(\zeta)}{\sqrt{\frac{1}{a} + \zeta(t - t_1 - \zeta x)}} dt_1, \quad (2.17)$$

где  $x_{12}$  дается (2.12)-(2.14).

**3. Решение задачи наращивания границы трещины в отсутствии трения.**  
Рассмотрим следующую граничную задачу для изотропной упругой среды ( $y = 0$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= 0, & -\infty < x < \infty \\ V &= 0, & x < 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= - \left\{ \frac{K(\bar{\alpha}^2 - b^2)\rho}{\rho_s} + \xi \right\} \frac{\partial U}{\partial x} - \left( \frac{K\bar{\alpha}^2\rho}{\rho_s} + \xi \right) \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{i_0}{\rho_s} H(x)H(t), & x > 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решение ищется методом интегральных преобразований Лапласа по  $t$  и Фурье по  $x$ . Обозначив через  $\bar{U}, \bar{V}$  преобразования Лапласа по  $t$  от  $U, V$  и через  $\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{V}}$  – преобразование Фурье по  $x$  от  $\bar{U}, \bar{V}$ , можно записать

$$\bar{U}; \bar{V} = \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\alpha}x + i\bar{\beta}_n y} \bar{\bar{U}}_n; \bar{\bar{V}}_n d\bar{\alpha}, \quad \bar{\beta}_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2} - \bar{\alpha}^2}, \quad c_1 = \bar{\alpha}, \quad c_2 = b, \quad (3.2)$$

где  $s = -i\omega$  есть параметр преобразования Лапласа. Кроме того

$$\bar{\bar{V}}_1 = \frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\alpha}} \bar{\bar{U}}_1, \quad \bar{\bar{V}}_2 = -\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}_2} \bar{\bar{U}}_2. \quad (3.3)$$

Подставляя (3.2) в (3.1) и обращая преобразование Фурье по  $x$ , можно получить

$$\bar{\bar{V}}_1 + \bar{\bar{V}}_2 = V^-, \quad \bar{\beta}_1 \bar{\bar{U}}_1 + \bar{\beta}_2 \bar{\bar{U}}_2 + \bar{\alpha} V^- = 0, \quad (3.4)$$

$$sV^- = -K_2 i\bar{\alpha} (\bar{\bar{U}}_1 + \bar{\bar{U}}_2) - K_3 (i\bar{\beta}_1 \bar{\bar{V}}_1 + i\bar{\beta}_2 \bar{\bar{V}}_2) - \frac{i_0}{2\pi i \bar{\alpha} s \rho_s} + \Omega_2^+,$$

где  $\Omega_2^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 (\bar{V}_1 + \bar{V}_2)|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx$ ,  $V^- = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \bar{V}|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx$ ; индекс (+) дает функции, аналитические в верхней полуплоскости  $\bar{\alpha}$ , а индекс (-) – функции, аналитические в нижней полуплоскости.

Из (3.4) с учетом (3.3) получим уравнение Винера – Хопфа

$$\Omega_2^+ - \frac{i_0}{2\pi i \bar{\alpha} s \rho_s} = iR(\bar{\alpha}) \beta_2 C_0 V^-, \quad (3.5)$$

где

$$R(\bar{\alpha}) = \frac{-\bar{\beta}_1 \frac{\omega^3}{b^2} + \bar{\alpha}^2 K_2 (\bar{\beta}_2^2 - \bar{\alpha}^2 - 2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2) + K_3 \bar{\beta}_1 (\bar{\beta}_1 (\bar{\beta}_2^2 - \bar{\alpha}^2) + 2\bar{\alpha}^2 \bar{\beta}_2)}{\frac{\omega^2}{b^2} \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 C_0},$$

$$C_0 = \frac{(K_2 + K_3) b^2}{\bar{a}^2}. \quad (3.6)$$

Функция  $R(\bar{\alpha})$  в комплексной плоскости  $\bar{\alpha}$  имеет два чисто мнимых и два вещественных корня:  $\pm \bar{\alpha}_2 i, \pm \bar{\alpha}_1$  и  $R(\bar{\alpha}) \rightarrow 1$  при  $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$ . Для факторизации функции  $R(\bar{\alpha})$  введем следующую функцию:

$$F(\bar{\alpha}) = R(\bar{\alpha}) \frac{\left(\frac{\omega}{\bar{a}} - \bar{\alpha}\right) \left(\frac{\omega}{\bar{a}} + \bar{\alpha}\right)^3}{(\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}_1^2)(\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}_2^2)}. \quad (3.7)$$

Тогда можно получить

$$R^-(\bar{\alpha}) = \frac{G^-(\bar{\alpha})(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_1)(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_2 i)}{\left(\frac{\omega}{\bar{a}} - \bar{\alpha}\right)^{1/2} \left(\frac{\omega}{b} - \bar{\alpha}\right)^{1/2}}, \quad R^+(\bar{\alpha}) = \frac{R(\bar{\alpha})}{R^-(\bar{\alpha})}, \quad (3.8)$$

$$G^-(\bar{\alpha}) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\bar{\alpha}}{b}}^{\frac{\bar{\alpha}}{a}} \operatorname{arctg} \frac{\frac{\omega^3}{b^2} \bar{\beta}_1^* - 2(K_3 - K_2) \bar{\zeta}^2 \bar{\beta}_1^* \bar{\beta}_2^*}{(K_3(\bar{\beta}_1^*)^2 - K_2 \bar{\zeta}^2)(\bar{\zeta}^2 - \bar{\beta}_2^2)} \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\bar{\alpha}}{b}}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\frac{\omega^3}{b^2} \bar{\beta}_1^*}{(K_3(\bar{\beta}_1^*)^2 - K_2 \bar{\zeta}^2)(\bar{\zeta}^2 - \bar{\beta}_2^2) - 2\bar{\beta}_1^* \bar{\beta}_2^* \bar{\zeta}^2 (K_3 - K_2)} \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}} \right\}.$$

Уравнение (3.5) Винера – Хопфа решается известным методом в виде [9]

$$\Omega_2^+ = \frac{i_0}{2\pi i \bar{\alpha} s \rho_s} \left( 1 - \frac{\bar{\beta}_2^+(\bar{\alpha}) K^+(\bar{\alpha})}{\bar{\beta}_2^+(0) K^+(0)} \right), \quad V^- = - \frac{i_0}{2\pi \bar{\alpha} s \rho_s \bar{\beta}_2^+(0) K^+(0) \bar{\beta}_2^-(\bar{\alpha}) K^-(\bar{\alpha}) C_0},$$

где  $\bar{\beta}_2^\pm = \sqrt{\frac{\omega}{b} \pm \bar{\alpha}}$ ,  $\bar{\beta}_n^* = \sqrt{\bar{\alpha}^2 - \frac{\omega^2}{c_n^2}}$ ,  $c_1 = \bar{a}$ ,  $c_2 = b$ , и, переходя к безразмерной

переменной  $\alpha = \frac{\bar{a}}{\omega} \bar{\alpha}$  и новым обозначениям  $\zeta = \frac{\bar{\zeta}}{\bar{a}} \omega$ ,  $\bar{\beta}_n^* = \sqrt{\bar{\alpha}^2 - \frac{\omega^2}{c_n^2}} =$

$\frac{\omega}{\bar{a}} \sqrt{\alpha^2 - \frac{\bar{a}^2}{c_n^2}}$ ,  $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 \frac{\omega}{\bar{a}}$ ,  $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 \frac{\omega}{\bar{a}}$  получим

$$G^-(\alpha) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_1^{\frac{\bar{\alpha}}{a}} \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{b^2 \bar{a}} \sqrt{\zeta^2 - 1} + \frac{2}{\bar{a}^4} (K_2 - K_3) \zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - 1} \sqrt{\frac{\bar{a}^2}{b^2} - \zeta^2}}{\frac{1}{\bar{a}^4} (K_3(\zeta^2 - 1) - K_2 \zeta^2) \left( 2\zeta^2 - \frac{\bar{a}^2}{b^2} \right)} \frac{d\zeta}{\zeta - \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\bar{\alpha}}{b}}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\frac{\bar{a}^3}{b^2} \sqrt{\zeta^2 - 1}}{(K_3(\zeta^2 - 1) - K_2 \zeta^2) \left( 2\zeta^2 - \frac{\bar{a}^2}{b^2} \right) + 2\sqrt{\zeta^2 - 1} \sqrt{\zeta^2 - \frac{\bar{a}^2}{b^2}} \zeta^2 (K_2 - K_3)} \frac{d\zeta}{\zeta - \alpha} \right\}.$$

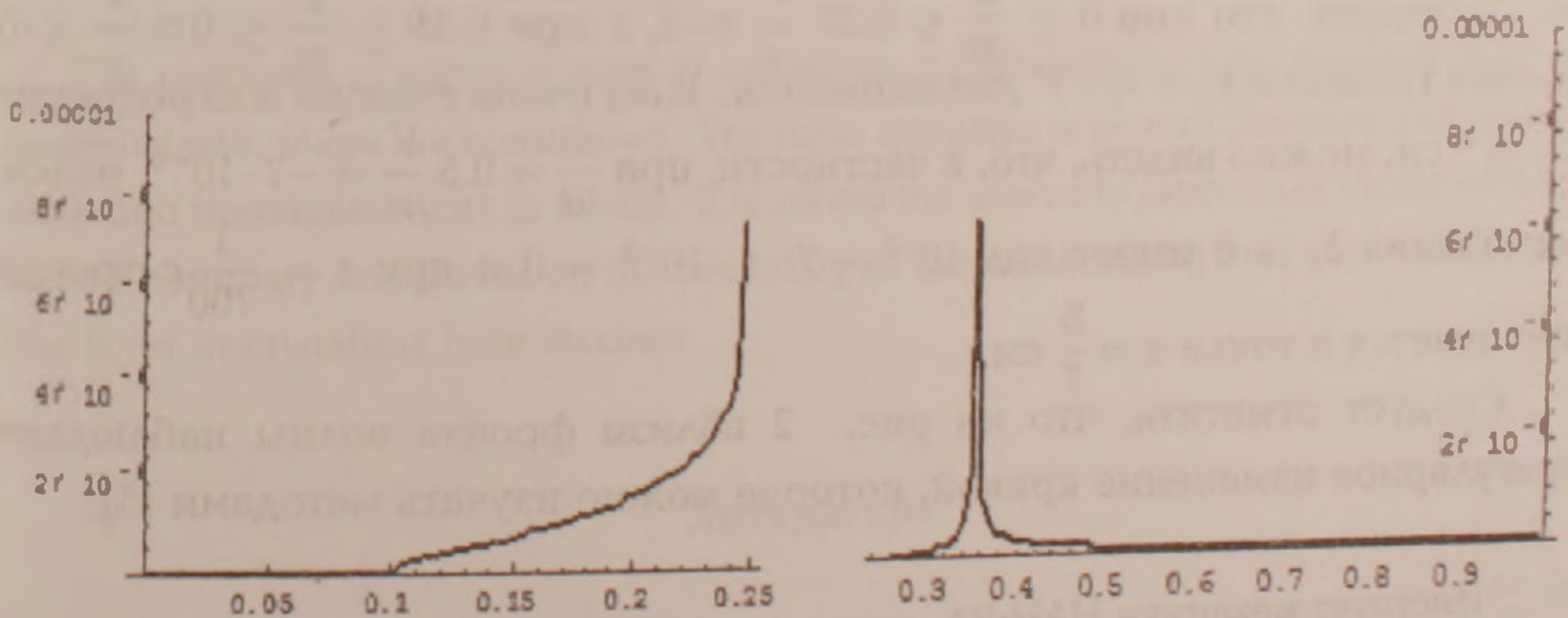


Рис. 1. На оси ординат  $\frac{t}{a} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ , на оси абсцисс  $\frac{x}{at}$ .

Обратное преобразование Лапласа и Фурье от (3.5) дает (3.6), записанное

в форме Смирнова – Соболева [10], и при  $y = 0$  имеет вид

$$\frac{t}{\bar{a}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V = \operatorname{Re} \frac{\frac{i_0}{\rho_s \bar{a}} G^-(0) \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \sqrt{1 - \frac{\bar{a}t}{x}}}{\left(\frac{K_3}{\bar{a}} - 1\right) \left(\frac{\bar{a}t}{x} - \alpha_1\right) \left(\frac{\bar{a}t}{x} - \alpha_2 i\right) G^-\left(\frac{\bar{a}t}{x}\right)},$$

$$V = x \operatorname{Re} \frac{\frac{i_0}{\rho_s \bar{a}} G^-(0) \alpha_1 \alpha_2}{\left(\frac{K_3}{\bar{a}} - 1\right)} \int_0^{\frac{\bar{a}t}{x}} \frac{\sqrt{1 - \alpha} \left(\frac{\bar{a}t}{x} - \alpha\right) d\alpha}{(\alpha' - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2 i) \alpha G^-(\alpha)}. \quad (3.9)$$

Сделаны расчеты для функции (3.9) при  $\frac{\bar{a}}{b} = 4$ ,  $\frac{K_2}{\bar{a}} = 0.00058$ ,  $\frac{K_3}{\bar{a}} = 0.00062$ ,  $\alpha_1 = 0.99999987$ ,  $\alpha_2 = 13333.3326$  и построены графики (рис. 1, 2), где взято  $\frac{i_0}{\rho_s \bar{a}} = \frac{1}{2 \cdot 10^5}$ ,  $\bar{a} = 1000 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ ,  $\frac{V_0}{\bar{a}} = \frac{1}{2 \cdot 10^4}$ .

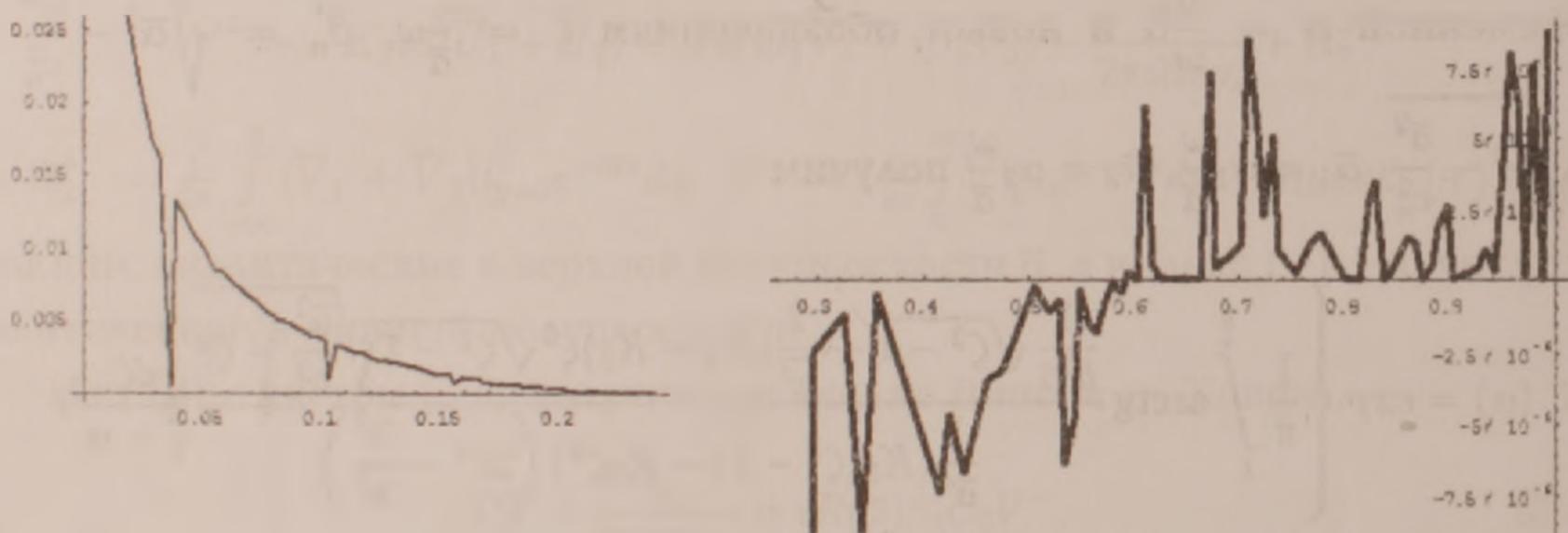


Рис. 2. На оси ординат  $\frac{v}{x}$ , на оси абсцисс  $\frac{x}{at}$ .

Как видно из рис. 1, ускорение  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} V$  трещины везде положительно. Из рис. 2 следует, что при  $0 \leq \frac{x}{at} \leq 0.25$   $\frac{V}{x} > 0$ , а при  $0.25 \leq \frac{x}{at} \leq 0.6$   $\frac{V}{x} < 0$  и ширины трещины  $b_1 = b_0 + V$  уменьшаются. Взяв очень тонкую микротрещину  $b_0 = 10^{-6}$  см, можно видеть, что, в частности, при  $\frac{x}{at} \approx 0.5$   $\frac{V}{x} = -7 \cdot 10^{-6}$ , условие залечивания  $b_1 = 0$  имеет вид  $10^{-6} - 7 \cdot t \cdot 10^{-3} = 0$  и при  $t = \frac{1}{700}$  с трещина залечивается в точке  $x = \frac{5}{7}$  см.

Следует отметить, что на рис. 2 вблизи фронта волны наблюдается нерегулярное изменение кривой, которое можно изучать методами [5].

<sup>1</sup> Институт механики НАН РА

<sup>2</sup> Горисский государственный университет

Член-корреспондент НАН РА А. Г. Багдоев, А. Н. Мартиросян,  
А. С. Динунц, А. В. Давтян

### Исследование задачи о залечивании трещины в термоупругой среде

Рассматриваются задачи о наращивании слоя примесей, содержащихся в жидкости (флюиде), поступающей в трещину в термоупругой плоскости. Основное внимание уделено эффектам термодиффузии и термоупругости в среде. Решена нестационарная задача термоупругости при смешанных граничных условиях на границе трещины с учетом наращивания на ней среды за счет осаждения примесей.

Դոկտորական անդամ Ա. Գ. Բագդոև, Ա. Ն. Մարտիրոսյան,  
Ա. Ս. Դինունց, Ա. Վ. Դավթյան

### Ջերմաառածգական միջավայրում ճեղքի բուժման խնդրի հեղազոտումը

Դիտարկվում են ջերմաառածգական հարթությունում ճեղքի մեջ թափանցող հեղուկում պարունակվող շերտի խտացման խնդիրները: Հիմնական ուշադրությունը դարձվել է միջավայրում ջերմադիֆուզիոն եւ ջերմաառածգական էֆեկտներին: Լուծվել է ջերմաառածգականության ոչ ստացիոնար խնդիրը ճեղքի եզրին փրված խառը եզրային պայմանների դեպքում՝ նկատի ունենալով միջավայրի աճեցումը եզրին խառնուրդների դեպքում:

Corresponding member of NAS RA A. G. Bagdоеv, A. N. Martirosyan,  
A. S. Dinunts, A. V. Davtyan

### Investigation of the Problem of Closing the Crack in the Thermoelastic Media

The problems of rising of layer of cristallins, constaining in fluid, entering in a crack in thermoelastic plane are considered. The main attention is paid to the effects of thermodiffusion and thermoelasticity in media. It is solved the unsteady problem of thermoelasticity in mixed boundary conditions on the boundary of the crack taking into account the rising of the layer of cristallins from mixture.

### Литература

1. Глико А.О. - Труды VI междунар. конф., Горис – Степанакерт, 2008. С. 170-177.
2. Bhattacharia Subhamoy, Blakeborough Anthony, Dush Suresh - Proceedings of the institution of civil engineers. 2008. V. 161. P. 54-60.

3. Получение конформных поверхностей испытательного контакта и оценка трибохарактеристик масла И20А. <http://www.wl-technology.ru/ran>

4. Лайтфут Т. Явления массопереноса в биологических системах. М. Мир. 1976.

5. Мартиросян Г. А., Багдоев А.Г. - Докл. НАН РА. 2008. Т. 108. N4. С. 341-349.

6. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М. 1988. 253 с.

7. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.Г. Механика сплошных сред. Гос. изд. техн.-теорет. лит. М. 1954. 788 с.

8. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М. Наука. 1970. 380 с.

9. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М. Л. И. 1962. 278 с.

10. Мартиросян А. Н. В сб.: Зангак-97. Ереван. 2007. С. 244.