ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր 110 2010 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

С. А. Вагаршакян

О задаче предсказания

(Представлено чл.-кор. НАН РА В.А.Мартиросяном 1/II 2010)

Ключевые слова: *наилучшая аппроксимация, предсказание*

Основы теории предсказания были заложены в работах А. Колмогорова [1], Н. Винера и П. Мазани [2, 3].

Сначала приведем некоторые хорошо известные определения теории случайных процессов, (см. [4]) с целью подчеркнуть особенности введенного в данной статье нового понятия строго стационарного процесса.

Пусть Ω некоторое пространство элементарных событий с σ-алгеброй Υ, на которой определена вероятностная мера P. Тройка

$$(\Omega, \Upsilon, P)$$

называется вероятностным пространством.

Определение 1. *Под случайным процессом* $\xi_n, n \in Z$, *будем понимать совокупность случайных величин, зависящих от временного параметра* n.

Иногда, чтобы подчеркнуть зависимость каждой из величин $\xi_n, n \in Z$, от ω, мы будем пользоваться обозначением $\xi_n(\omega), n \in Z$.

Определение 2. *Случайный процесс* $\xi_n, n \in Z$, *называется стационарным в широком смысле, если*

1) для любого $n \in Z$ *выполняется условие*

$$M(|\xi_n|^2) < \infty;$$

2) математичекие ожидания

$$M(\xi_n) = \int_\Omega \xi_n(\omega) P(d\omega)$$

принимают постоянное значение, не зависящее от $n \in Z$;

3) для любого $k \in Z$ корреляционная функция удовлетворяет условию

$$M(\xi_n\overline{\xi_m}) = M(\xi_{n+k}\overline{\xi_{m+k}}).$$

При исследовании в широком смысле стационарных процессов полезно вводить понятие спектральной плотности

Определение 3. *Функция $S(x)$, $-\pi < x < \pi$, называется спектральной плотностью стационарного процесса $\xi_n, n \in Z$, если*

$$M(\xi_n\overline{\xi_m}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)x}S(x)dx.$$

Хорошо известно, что спектральная плотность является неотрицательной функцией.

Теорема 1. *Пусть $\xi_n, n \in Z$, в широком смысле стационарный процесс. Тогда для любых комплексных чисел c_k имеет место равенство*

$$M\left(\left|\sum_{k=-n}^{n} c_k\xi_k\right|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ikx}\right|^2 S(x)dx.$$

Доказательство. Утверждение следует из следующего равенства:

$$M\left(\left|\sum_{k=-n}^{n} c_k\xi_k\right|^2\right) = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n} c_k\bar{c}_j M(\xi_k\bar{\xi}_j) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ikx}\right|^2 S(x)dx.$$

Определение 4. *Случайный процесс $\xi_n, n \in Z$, называется строго стационарным, если*

1) для любого $n \in Z$ выполняется условие

$$\xi_n(\omega) \in L^\infty;$$

2) математические ожидания

$$M(\xi_n) = \int_\Omega \xi_n(\omega)P(d\omega)$$

принимают постоянное значение, не зависящее от $n \in Z$;

3) для любых $k, n, m \in Z$ корреляционная функция удовлетворяет условию

$$M(\xi_n\overline{\xi_m}) = M(\xi_{n+k}\overline{\xi_{m+k}}), \quad n, m \in Z;$$

4) для любых индексов $k_1,\dots,k_m$ и $j_1,\dots,j_m$ имеет место равенство

$$M(\xi_{k_1}\dots\xi_{k_m}\overline{\xi_{j_1}}\dots\overline{\xi}_{j_m})=\sum_{p=-\infty}^{\infty}M(\xi_{k_1-p}\overline{\xi_{j_1}})M(\xi_{k_2+p}\dots\xi_{k_m}\overline{\xi_{j_2}}\dots\overline{\xi}_{j_m}).$$

Теорема 2. *Если стационарный процесс имеет спектральную плотность $S(x)$, то*

$$M(\xi_{k_1}\dots\xi_{k_m}\overline{\xi_{j_1}}\dots\overline{\xi}_{j_m})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k_1+\dots+k_m-j_1-\dots-j_m)x}S^m(x)dx.$$

Теорема 3. *Пусть $\xi_n, n\in Z$, в строгом смысле стационарный процесс. Тогда имеет место равенство*

$$M\left(\left|\sum_{k=-n}^{n}c_k\xi_k\right|^{2m}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}\right|^{2m}S^m(x)dx.$$

Доказательство. Имеем

$$M\left(\left|\sum_{k=-n}^{n}c_k\xi_k\right|^{2m}\right)=$$

$$=\sum_{k_1,\dots,k_m=-n}^{n}\ \sum_{j_1,\dots,j_m=-n}^{n}c_{k_1}\overline{c}_{j_1}\dots c_{k_m}\overline{c}_{j_m}M(\xi_{k_1}\dots\xi_{k_m}\overline{\xi}_{j_1}\dots\overline{\xi}_{j_m}).$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}\right|^{2m}S^m(x)dx=$$

$$=\sum_{k_1,\dots,k_m=-n}^{n}\ \sum_{j_1,\dots,j_m=-n}^{n}c_{k_1}\overline{c}_{j_1}\dots c_{k_m}\overline{c}_{j_m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k_1+\dots+k_m-j_1-\dots-j_m)x}S^m(x)dx.$$

Пусть имеем стационарный процесс

$$\xi_n(\omega),\quad n\in Z,\quad \omega\in\Omega.$$

Предположим, что этот процесс наблюдается до момента времени m, т. е. известны его значения

$$\xi_n(\omega),\quad n\le m,\quad \omega\in\Omega \tag{1}$$

и требуется на основе значений этих величин предсказать значение стационарного процесса в некоторый будущий момент времени $\xi_{m+\tau}(\omega)$, где $\tau>0$. Причем сам способ предсказания должен быть линейным. Последнее означает, что величина $\hat{\xi}_{m+\tau}(\omega)$, являющаяся прогнозом, должна принадлежать замыканию линейной оболочки величин (1), т.е.

$$\hat{\xi}_{m+\tau}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{m} c_k \xi_k(\omega).$$

Естественно возникает вопрос, какой прогноз считать наилучшим? В классической теории случайных процессов линейный прогноз считается наилучшим, если его ошибка

$$\sigma_2^2(\tau) = M\left(\left|\xi_{m+\tau} - \hat{\xi}_{m+\tau}\right|^2\right)$$

минимальная.

В данной работе мы вводим также и другую характеристику оптимальности прогноза. Возможно, что с практической точки зрения новая характеристика более естественная. Положим

$$\sigma(\tau) = \sup_{\omega\in\Omega} \left|\xi_{m+\tau}(\omega) - \hat{\xi}_{m+\tau}(\omega)\right|.$$

Введенная величина формально зависит и от параметра m. Однако из-за стационарности рассматриваемых процессов такой зависимости фактически нет. Поэтому, чтобы не усложнять обозначения, мы явно не указываем параметр m.

Приведенные ниже две теоремы позволяют установить связь между задачами теории прогноза и весовой аппроксимации аналитическими функциями.

Теорема 4. *Пусть $\xi_n, n \in Z$, в широком смысле стационарный процесс со спектральной плотностью $S(x)$. Тогда имеет место равенство*

$$M\left(\left|\xi_{m+\tau} - \sum_{k=-\infty}^{m} c_k \xi_k\right|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|e^{i(m+\tau)x} - \sum_{k=-\infty}^{m} c_k e^{ikx}\right|^2 S(x)dx.$$

Теорема 5. *Пусть $\xi_n, n \in Z$, в строгом смысле стационарный процесс со спектральной плотностью $S(x)$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\omega\in\Omega}\left|\xi_{m+\tau}(\omega) - \sum_{k=-\infty}^{m} c_k \xi_k(\omega)\right| = \sup_{x}\left|e^{i(m+\tau)x} - \sum_{k=-\infty}^{m} c_k e^{ikx}\right|\sqrt{S(x)}.$$

В приведенной ниже теореме мы опираемся на классическую теорему Г. Сеге (см. [5], с. 197).

Теорема 6. *Пусть $\xi_n, n \in Z$, в широком смысле стационарный процесс со спектральной плотностью $S(x)$. Тогда имеет место равенство*

$$\sigma_2^2(1) = \inf_{c_k} M\left(\left|\xi_{m+1} - \sum_{k=-\infty}^{m} c_k \xi_k\right|^2\right) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln S(x)dx\right\}.$$

В приведенной ниже теореме мы опираемся на классическую теорему А. Колмогорова (см. [6], с. 475).

Теорема 7. *Пусть $\xi_n, n \in Z$, в широком смысле стационарный процесс со спектральной плотностью $S(x)$. Тогда имеет место равенство*

$$\sigma_2^2(2) = \inf_{c_k} M\left(\left|\xi_{m+2} - \sum_{k=-\infty}^{m} c_k\xi_k\right|^2\right) =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln S(x)dx\right\}\sqrt{1+\frac{a^2}{4}},$$

где

$$a = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \ln S(x)dx.$$

В приведенной ниже теореме мы опять опираемся на классическую теорему Г. Сеге (см. [5], с. 197).

Теорема 8. *Пусть $\xi_n, n \in Z$, в строгом смысле стационарный процесс со спектральной плотностью $S(x)$. Тогда имеет место равенство*

$$\sigma(1) = \inf_{c_k}\sup_{\omega\in\Omega}\left|\xi_{m+1}(\omega) - \sum_{k=-\infty}^{m} c_k\xi_k(\omega)\right| = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln S(x)dx\right\}.$$

Приведенная ниже теорема опирается на результаты из [7].

Теорема 9. *Пусть $\xi_n, n \in Z$, в строгом смысле стационарный процесс со спектральной плотностью $S(x)$. Тогда имеет место равенство*

$$\sigma(2) = \inf_{c_k}\sup_{\omega\in\Omega}\left|\xi_{m+2}(\omega) - \sum_{k=-\infty}^{m} c_k\xi_k(\omega)\right| =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln S(x)dx\right\}\sqrt{1+\frac{a^2}{2}+a\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}}.$$

Ереванский государственный университет

С. А. Вагаршакян

О задаче предсказания

Введено новое определение строго стационарного процесса. Рассматривается проблема предсказания на один и два шага вперед. Приведены точные оценки ошибки прогноза.

Ս. Ա. Վաղարշակյան

Կանխատեսման խնդրի մասին

Բերվում է խիստ ստացիոնարության նոր գաղափարը: Դիտարկվում է կանխատեսման խնդիրը մեկ եւ երկու քայլ առաջ: Կանխատեսման ճշտության համար ստացված են ճշգրիտ գնահատականներ:

S. A. Vagharshakyan

On Prediction Problem

A new definition of strict stationary process is introduced. We consider the problem of prediction by one and two steps. The sharp estimations of prediction error are given.

Литература

1. *Колмогоров А. Н.* - Изв. АН СССР. 1941. Т. 5. С. 3-14.
2. *Winer N., Masani P.* - Acta Mathematica. 1957. V. 98. P. 111-150.
3. *Winer N., Masani P.* - Acta Mathematica. 1958. V. 99. P. 93-137.
4. *Вентцель А.Д.* Курс теории случайных процессов. М. Наука. 1975.
5. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. М. Мир. 1984.
6. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М. Изд-во физ.-мат. лит. 1962.
7. *Вагаршакян С. А.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2007. Т. 42. 5. С. 11-16.