ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր 110 2010 № 1

МЕХАНИКА

УДК 532.5.032

М. А. Брутян

Вихрь Бюргерса в микрополярной жидкости

(Представлено иностранным чл. НАН РА А. П. Сейраняном 6/VII 2009)

Ключевые слова: *микрополярная жидкость, вихревые течения, смазочный слой, точные решения*

1. Введение. В классической гидродинамике ньютоновской жидкости хорошо известно решение Бюргерса [1], описывающее стационарное вихревое течение, в котором эффект вязкой диффузии компенсируется нелинейным эффектом усиления завихренности при растяжении вихревых нитей. Любопытно, что такого рода течения имеют не только очевидное отношение к проблеме турбулентности или атмосферным явлениям типа торнадо, но и довольно неожиданное отношение к теории смазки. При наблюдении за полимерной пленкой, нанесенной на поверхности до их взаимного трения, обнаружено, что в результате трения поверхностей со смазкой между ними образуются места износа с рельефом пленки, явно соответствующим действию на пленку сосредоточенных отрывающих усилий. По мнению ряда авторов (см., например, [2]) этот механизм связан с формированием над поверхностью трения вихреобразной динамической структуры, которая и вырывает частицы полимера непосредственно из поверхности трения. Таким образом, изучение пространственных вихревых структур представляет не только значительный научный, но и практический интерес.

2. Определяющие уравнения микрополярной жидкости в задаче Бюргерса. Одним из подходов к исследованию вихревых структур в реологически сложных течениях может стать изучение неньютоновских жидкостей, для описания которых требуются дополнительные переменные гидродинамического типа. Наиболее известной моделью такого сорта, которая используется в частности и для изучения течений в смазочном слое, является так называемая микрополярная жидкость [3-5]. При макроскопическом описании этой среды учитывается асимметричность тензора напряжений и наряду с классическими гидродинамическими переменными вводятся три дополнительные, интерпретируемые как компоненты угловой скорости микровращения Ω.

Уравнения движения микрополярной жидкости, часто называемые уравнениями асимметрической гидромеханики, в стационарном случае имеют вид (см., например, [5])

$$\rho(v \cdot \nabla)V = (\mu + k)\Delta V + k \operatorname{rot} \Omega - \nabla p, \ \operatorname{div} V = 0 \tag{1}$$

$$\rho J[(V \cdot \nabla)\Omega - (\Omega \cdot \nabla)V] = (\alpha + \beta) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \Omega) + \gamma \Delta \Omega - 2k\Omega + k \operatorname{rot} V, \tag{2}$$

где p — давление, V — скорость, μ — коэффициент динамической вязкости, ρ — плотность массы, ρJ — плотность микромомента инерции; α, β, γ — коэффициенты вращательной вязкости, k — коэффициент вихревой вязкости, характеризующий меру "сцепления" частицы со своим окружением. При $k = 0$ уравнения (1) и (2) "расщепляются" и (1) переходит в классическое уравнение Навье-Стокса. Отметим, что уравнение (2) с точностью до вязких членов формально совпадает с уравнением Гельмгольца для эволюции вектора завихренности $\omega = \operatorname{rot} V$ в классической гидродинамике. Это естественно, так как оба вектора ω и Ω являются аксиальными.

Одним из точных решений трехмерных уравнений Навье-Стокса, описывающих стационарное вихревое течение с тремя ненулевыми компонентами скорости, является так называемый вихрь Бюргерса. В цилиндрической системе координат (r, θ, z) с соответствующими компонентами скорости $u_B(r)$, $v_B(r)$ и $w_B(z)$ это решение имеет вид [1]

$$u_B = -\frac{1}{2}ar, \ v_B = \frac{\Gamma_B}{2\pi r}\left[1 - \exp\left(-\frac{ar^2}{4\nu}\right)\right], \ w_B = az, \tag{3}$$

$$p_B = p_B(r, z) = -\frac{\rho a^2}{8}(r^2 + 4z^2) - \rho \int\limits_r^\infty \frac{v_B^2(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \tag{4}$$

$$\omega = \operatorname{rot} V = (0, 0, \omega_B), \ \omega_B = \frac{\Gamma_B a}{4\pi\nu} \exp\left(-\frac{ar^2}{4\nu}\right), \ \Gamma_B = 2\pi \int\limits_0^\infty \omega_B(r) r dr, \tag{5}$$

где a — постоянный положительный параметр задачи, $\nu = \mu/\rho$ — коэффициент кинематической вязкости, Γ_B — суммарная завихренность.

Перейдем к поиску обобщения решения Бюргерса на случай микрополярной жидкости. Вид (3)-(5), а также общая аксиальная природа векторов завихренности и угловой скорости микровращения Ω подсказывают поиск решения уравнений (1) и (2) в следующем виде:

$$u = -\frac{1}{2}ar, \; v = v(r), \; w = az, \; p = p(r, z), \; \Omega = [0, 0, \Omega(r)]. \tag{6}$$

Из (6) следует, что $\operatorname{div}\Omega = 0$, а $\operatorname{rot}\Omega = (0, -d\Omega/dr, 0)$. Кроме того

$$(V \cdot \nabla)\Omega - (\Omega \cdot \nabla)V = -\operatorname{rot}[V \times \Omega] - V\nabla \cdot \Omega + \Omega\nabla \cdot V = \left[0, 0, \frac{a}{2r}\frac{d(\Omega r^2)}{dr}\right]. \tag{7}$$

С учетом (7) исходные уравнения (1) и (2) принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\left(\frac{v^2}{r} - \frac{1}{4}a^2 r\right), \; \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho a^2 z, \tag{8}$$

$$\frac{\rho a}{2}\frac{d}{dr}(rv) + (\mu + k)\left(\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right) = k\frac{d\Omega}{dr}, \tag{9}$$

$$\frac{\rho a J}{2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2\Omega) - \frac{\gamma}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Omega}{dr}\right) + 2k\Omega = \frac{k}{r}\frac{d}{dr}(rv). \tag{10}$$

Как и в случае классического вихря Бюргерса, давление находится из (8) с помощью простой квадратуры (4). Таким образом, задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9) и (10), которые удобно переписать в терминах ω и Ω

$$(\mu + k)\frac{d\omega}{dr} + \frac{\rho a}{2}r\omega = k\frac{d\Omega}{dr}, \tag{11}$$

$$\frac{\rho J a}{2r}\frac{d}{dr}(r^2\Omega) - \frac{\gamma}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Omega}{dr}\right) = k(\omega - 2\Omega). \tag{12}$$

Проведем обезразмеривание уравнений (11) и (12). В качестве характерного размера, по аналогии со случаем $k = 0$, выберем "вязкую длину" $l = \sqrt{(\mu + k)/\rho a}$. Введем безразмерную независимую переменную $x = r/l$ и безразмерные параметры $A = J/2l^2$ и $B = \gamma/(\mu + k)l^2$. Тогда определяющие уравнения (11) и (12) микрополярной жидкости в задаче Бюргерса примут окончательный вид

$$\frac{d\omega}{dx} + \frac{1}{2}x\omega = \lambda\frac{d\Omega}{dx}, \tag{13}$$

$$A\frac{d}{dx}(x^2\Omega) - B\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\Omega}{dx}\right) = \lambda x(\omega - 2\Omega), \tag{14}$$

где $\lambda = k/(\mu + k)$. В заключение раздела заметим, что сведение рассматриваемой задачи с частными производными к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений стало возможным из-за того, что в классической задаче Бюргерса ($k = 0$) изначально уже имеется размерная длина $\sqrt{\mu/\rho a}$ и появление дополнительной "внутренней длины" не нарушает вид решения (6).

3. Интегральный инвариант и численное решение задачи. Рассмотрим некоторые свойства определяющих уравнений (13) и (14). Выполняя дифференцирование в уравнении (14) и считая, что $\Omega(x)$ и ее производные остаются конечными при $x = 0$, находим, что на оси вихря должно выполняться условие

$$\frac{d\Omega}{dx} = 0 \text{ при } x = 0. \tag{15}$$

Тогда из (13) немедленно получаем, что

$$\frac{d\omega}{dx} = 0 \text{ при } x = 0. \tag{16}$$

Проинтегрируем теперь уравнение (14) по области течения. При конечных значениях $\Omega(x)$ на оси и достаточной скорости убывания на бесконечности $\Omega(x) = O(1/x^{2+\varepsilon}, \varepsilon > 0)$ после несложных вычислений приходим к следующему интегральному инварианту:

$$\Gamma_\omega - 2\Gamma_\Omega = 0, \tag{17}$$

где

$$\Gamma_\omega = 2\pi l^2 \int\limits_0^\infty \omega(x) x dx, \quad \Gamma_\Omega = 2\pi l^2 \int\limits_0^\infty \Omega(x) x dx. \tag{18}$$

Таким образом, установлено, что при эволюции вихря Бюргерса в микрополярной жидкости суммарная угловая скорость микровращения всегда равна половине суммарной завихренности.

Затухающие на бесконечности решения обыкновенных дифференциальных уравнений (13) и (14) находились численно конечно-разностным методом Келлера второго порядка точности [6]. Для этого (13) и (14), после введения дополнительных зависимых переменных, сначала приводятся к системе уравнений первого порядка, а затем, после конечно-разностной аппроксимации, сводятся к системе алгебраических уравнений, которая в свою очередь решается методом блочной прогонки с граничными условиями (15) и (16). Расчеты проводились на равномерной сетке с числом узлов $N = 501$ при заданных параметрах $C = 0.0001$, $D = 0.01$ и различных значениях λ. Сравнение результатов расчета с точным решением Бюргерса

(3)-(5) показывает, что при одинаковом значении циркуляции $\Gamma_\omega = \Gamma_B$ величина завихренности на оси в микрополярной жидкости больше, а кривая ее распределения является более крутой. Это говорит о том, что учет микрополярных свойств среды усиливает так называемый эффект торнадо. В работе [2] на основе классического решения Бюргерса сделана оценка силы Δp_B, которая действовала бы на сферическую частицу полимера со стороны вихреобразной структуры, возникающей в смазочном слое между трущимися поверхностями. Сравнение с силой, необходимой для вырывания частицы полимера, показало, что они одного порядка, но оценка Δp на основе классического "ньютоновского" вихря Бюргерса дает заниженное значение. На рис.1 показан результат численного расчета зависимости $\Delta p/\Delta p_B$ от λ.

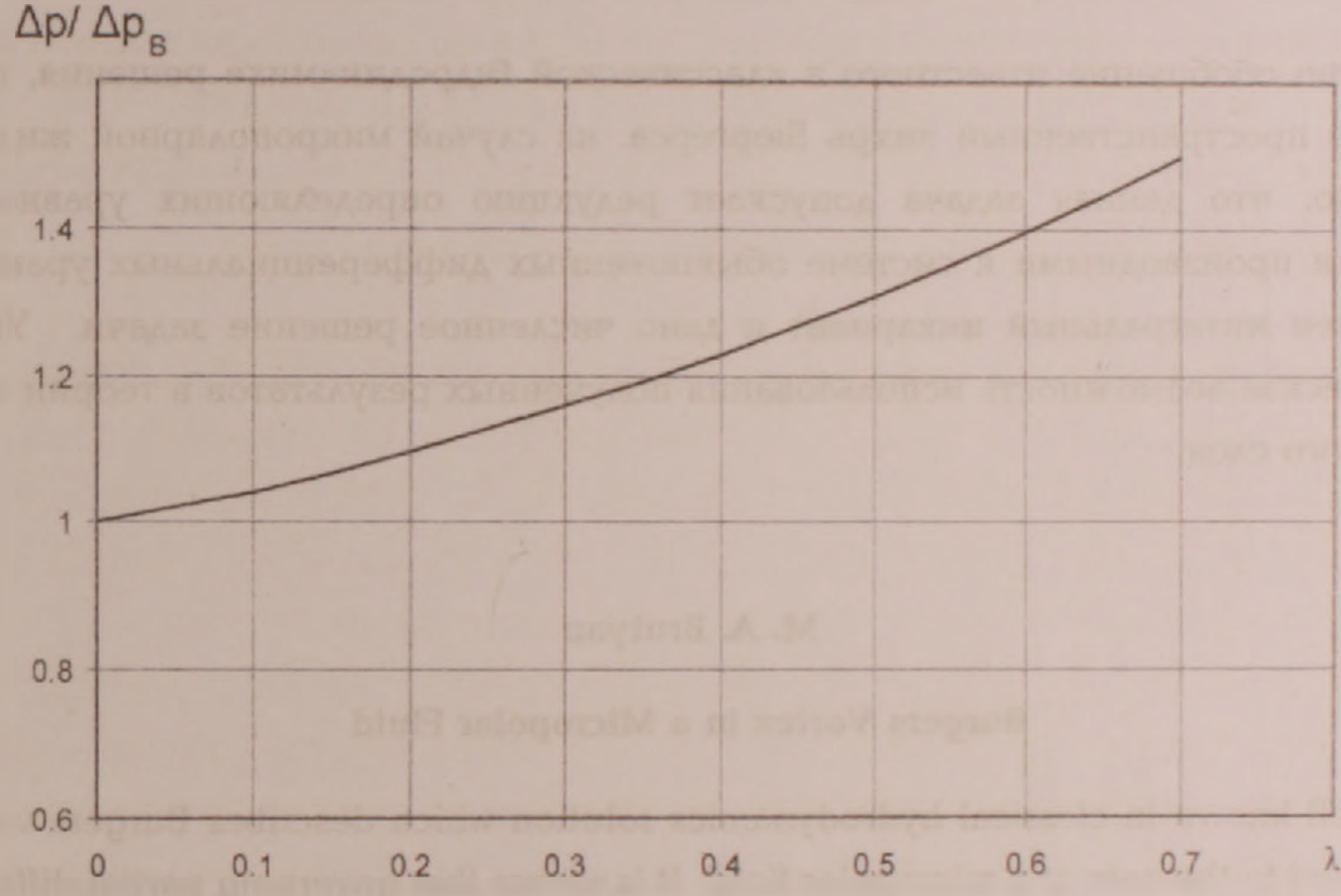

Рис. 1. Зависимость изменения относительного перепада давления $\Delta p/\Delta p_B$ от величины коэффициента "сцепления" λ микрополярной жидкости; Δp — перепад давления в микрополярной жидкости, Δp_B — перепад давления из решения Бюргерса в ньютоновской жидкости.

Видно, что увеличение λ приводит к возрастанию отрывающих усилий и тем самым приближает сделанную в [2] оценку к нужному значению. Заметим, что во всех проведенных расчетах интегральный инвариант (17) оказывался выполненным с точностью до 10^{-5}.

4. Заключение. Получено точное обобщение известной в классической гидродинамике задачи Бюргерса на случай пространственного стационарного вихревого течения микрополярной жидкости. Показано, что эта задача сводится к решению системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Найдена интегральная связь между завихренностью и угловой скоростью микровращения. Результаты работы имеют приложение к теории течения в смазочном слое, а также к другим вихревым течениям реологически сложных жидкостей.

ФГУП "Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского"

М. А. Брутян

Вихрь Бюргерса в микрополярной жидкости

Дано обобщение известного в классической гидродинамике решения, описывающего пространственный вихрь Бюргерса, на случай микрополярной жидкости. Показано, что данная задача допускает редукцию определяющих уравнений с частными производными к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Определен интегральный инвариант и дано численное решение задачи. Указана практическая возможность использования полученных результатов в теории трения смазочного слоя.

M. A. Brutyan

Burgers Vortex in a Micropolar Fluid

Well-known in classical hydrodynamics solution which describes Burgers vortex is generalized to the case of a micropolar fluid. It is shown that governing partial differential equations of this problem may be reduced to the system of the ordinary differential equations. Integral invariant and numerical solution of the problem are provided. It is shown that the obtained results occur to be applicable to the friction theory of lubrication layer.

Մ.Ա.Բրուտյան

Բյուրգերսի մրրիկը միկրոբեւեռային հեղուկում

Տրված է դասական հիդրոդինամիկայի հայտնի լուծման ընդհանրացումը, որը նկարագրում է Բյուրգերսի փարածական մրրիկը, երբ հեղուկը միկրոբեւեռային է: Ցույց է փրված, որ փվյալ խնդիրը թույլ է փալիս որոշիչ մասնակի ածանցյալներով հավասարումների ռեդուկցիան սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգին: Որոշված է ինփեգրալ ինվարիանփը, եւ բերված է թվային լուծումը: Ցույց է փրված սփացված արդյունքները քսուքային շերփի շփման փեսությունում օգփագործելու պրակփիկ հնարավորությունը:

Литература

1. *Burgers J.M.* - Advances in Applied Mechanics. Academic Press. 1948. V. 1. P. 171-199.

2. *Краснов Ю.К.* В сб.: Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. М. Наука. 1987.

3. *Eringen A.C.* - J. Math. Mech. 1966. V. 16. N1.

4. *Петросян Л.Г.* Некоторые вопросы механики жидкостей с несимметричным тензором напряжений. Изд-во. ЕГУ. 1986.

5. *Брутян М.А., Крапивский П.Л.* - Инж.-физ. ж. 1989. Т. 57. N2.

6. *Keller H.B.* - Ann. Rev. Fluid Mech. 1978. V. 10. P. 417-433.