ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 109 2009 № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Академик Л. А. Агаловян, Т. В. Закарян

О решении первой динамической пространственной краевой задачи для ортотропной прямоугольной пластинки

(Представлено 26/VI 2009)

Ключевые слова: *колебания, упругость, асимптотический метод, резонанс*

1. Классические и неклассические статические краевые задачи для тонких тел — балки, пластины, оболочки асимптотическим методом рассмотрены в [1-3]. Метод оказался особенно эффективным для решения динамических краевых задач. Установлена универсальная асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения, позволившая найти решения внутренней задачи и пограничного слоя для широких классов динамических краевых задач теории упругости для тонких тел [4-6]. Обзор исследований по применению асимптотического метода содержится в [7]. В данной работе рассмотрена пространственная задача теории упругости о вынужденных колебаниях ортотропных прямоугольных пластин, когда на лицевых поверхностях пластины заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений. Установлена отличная от статической краевой задачи асимптотика. Показано, что решение внутренней задачи полностью определяется после удовлетворения условий на лицевых поверхностях.

Требуется найти решение динамических уравнений теории упругости [8] для ортотропных прямоугольных пластин $D = \{(x,y,z) : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ |z| \le h,\ h \ll l,\ l = min(a,b)\}$ при граничных условиях на лицевых поверхностях $z = \pm h$:

$$\sigma_{\alpha z}(x,y,h,t) = \sigma^{+}_{\alpha z}(x,y)exp(i\Omega t), \sigma_{\alpha z}(x,y,-h,t) = -\sigma^{-}_{\alpha z}(x,y)exp(i\Omega t), \alpha = x,y,z \quad (1.1)$$

и условиях на боковой поверхности, которые пока не будем конкретизировать. Решение сформулированной задачи будем искать в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}(x,y,z,t)=\sigma_{jk}(x,yz)exp(i\Omega t),\ (u(x,y,z,t),v,w)=(u_x(x,y,z),u_y,u_z)exp(i\Omega t),$$
$$\alpha,\beta=x,y,z,\ j,k=1,2,3. \tag{1.2}$$

В динамических уравнениях теории упругости, перейдя к безразмерным координатам $\xi=x/l,\ \eta=y/l,\ \zeta=z/h$ и перемещениям $U=u_x/l,\ V=u_y/l,\ W=u_z/l$ и подставив (1.2) в эти уравнения, получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon=h/l$ систему

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\Omega_*^2U=0,\ \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\Omega_*^2V=0,\\
\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\Omega_*^2W=0,\ \frac{\partial U}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33},\\
\frac{\partial V}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}+a_{23}\sigma_{33},\ \varepsilon^{-1}\frac{\partial W}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{11}+a_{23}\sigma_{22}+a_{33}\sigma_{33},\\
\frac{\partial V}{\partial\xi}+\frac{\partial U}{\partial\eta}=a_{66}\sigma_{12},\ \frac{\partial W}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{13},\ \frac{\partial W}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23},\ \Omega_*^2=\rho h^2\Omega^2.
\end{gathered}\tag{1.3}$$

Решение системы (1.3) складывается из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I_b). Решение внутренней задачи будем искать в виде

$$\begin{gathered}
\sigma_{jk}^{int}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{jk}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\\
(U^{int},V^{int},W^{int})=\varepsilon^s(U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)}),\ j,k=1,2,3,\ s=\overline{0,N}.
\end{gathered}\tag{1.4}$$

Подставив (1.4) в (1.3) и приравняв в каждом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим непротиворечивую систему для определения коэффициентов $Q_{jk}^{(s)}$. Из этой системы напряжения $\sigma_{jk}^{(s)}$ можно выразить через перемещения по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^{(s)}&=\frac{1}{a_{55}}\left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi}\right),\ \sigma_{23}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}\left(\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),\\
\sigma_{12}^{(s)}&=\frac{1}{a_{66}}\left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right),\\
\sigma_{11}^{(s)}&=\frac{1}{\Delta}\left(-A_{23}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}-A_{12}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),\\
\sigma_{22}^{(s)}&=\frac{1}{\Delta}\left(-A_{13}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}+A_{33}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),\\
\sigma_{33}^{(s)}&=\frac{1}{\Delta}\left(A_{11}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{23}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}-A_{13}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),
\end{aligned}\tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
&A_{11}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2,\ A_{12}=a_{12}a_{33}-a_{23}a_{13},\ A_{13}=a_{11}a_{23}-a_{13}a_{12},\\
&A_{22}=a_{22}a_{33}-a_{23}^2,\ A_{23}=a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23},\ A_{33}=a_{11}a_{33}-a_{13}^2,\\
&\Delta=a_{11}A_{22}-a_{12}A_{12}-a_{13}A_{23},
\end{aligned}$$

$$Q^{(m)} \equiv 0 \text{ при } \ m < 0.$$

Для определения $U^{(s)}$, $V^{(s)}$, $W^{(s)}$ получаются уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 U^{(S)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}\Omega_*^2 U^{(s)} = R_U^{(s)}, \ \frac{\partial^2 V^{(S)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}\Omega_*^2 V^{(s)} = R_V^{(s)}, \\
&A_{11}\frac{\partial^2 W^{(S)}}{\partial \zeta^2} + \Delta\Omega_*^2 W^{(s)} = R_W^{(s)}, \\
&R_U^{(S)} = -a_{55}\left(\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \eta}, \\
&R_V^{(s)} = -a_{44}\left(\frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}, \\
&R_W^{(S)} = -\Delta\left(\frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta}\right) + A_{23}\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \eta} + A_{13}\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Решениями уравнений (1.6) являются

$$\begin{aligned}
&U^{(s)} = U_0^{(s)} + U_\tau^{(s)}, \ U_0^{(s)} = C_1^{(s)}(\xi,\eta)\sin\gamma_1\zeta + C_2^{(s)}(\xi,\eta)\cos\gamma_1\zeta, \\
&(U, V, W; C_1^{(s)}, C_2^{(s)}; C_3^{(s)}, C_4^{(s)}; C_5^{(s)} C_6^{(s)}; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \\
&\gamma_1 = \Omega_*\sqrt{a_{55}}, \ \gamma_2 = \Omega_*\sqrt{a_{44}}, \ \gamma_3 = \Omega_*\sqrt{\Delta/A_{11}},
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где $U_\tau^{(s)}$, $V_\tau^{(s)}$, $W_\tau^{(s)}$ – частные решения уравнений (1.6). По формулам (1.5) определив напряжения $\sigma_{13}^{(s)}$, $\sigma_{23}^{(s)}$, $\sigma_{33}^{(s)}$ и удовлетворив условиям (1.1), определим функции $C_j^{(s)}(\xi,\eta)$ и следовательно решение внутренней задачи. Имеем

$$\begin{aligned}
U_0^{(s)} = &\frac{\sqrt{a_{55}}}{\Omega_* \sin 2\gamma_1}[-(\sigma_{xz}^{+(s)} - f_{13}^{(s)}(\xi,\eta,1))\cos\gamma_1(1+\zeta) - \\
&- (\sigma_{xz}^{-(s)} + f_{13}^{(s)}(\xi,\eta,-1))\cos\gamma_1(1-\zeta)], \\
V_0^{(s)} = &\frac{\sqrt{a_{44}}}{\Omega_* \sin 2\gamma_2}[-(\sigma_{yz}^{+(s)} - f_{23}^{(s)}(\xi,\eta,1))\cos\gamma_2(1+\zeta) - \\
&- (\sigma_{yz}^{-(s)} + f_{23}^{(s)}(\xi,\eta,-1))\cos\gamma_2(1-\zeta)], \\
W_0^{(s)} = &\sqrt{\frac{\Delta}{A_{11}}}\frac{1}{\Omega_* \sin 2\gamma_3}[-(\sigma_{zz}^{+(s)} - f_{33}^{(s)}(\xi,\eta,1))\cos\gamma_3(1+\zeta) - \\
&- (\sigma_{zz}^{-(s)} + f_{33}^{(s)}(\xi,\eta,-1))\cos\gamma_3(1-\zeta)],
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$f_{13}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}}\left(\frac{\partial U_\tau^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}\right), \ f_{23}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}}\frac{\partial V_\tau^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{a_{55}}\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta},$$

$$f_{33}^{(s)} = \frac{A_{11}}{\Delta}\frac{\partial W_\tau^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{1}{\Delta}\left(A_{23}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{13}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}\right).$$

Напряжения будут вычислены по формулам (1.5). Полученное решение будет конечным, если

$$\sin 2\gamma_1 \neq 0, \ \sin 2\gamma_2 \neq 0, \ \sin 2\gamma_3 \neq 0. \tag{1.9}$$

Эти условия будут нарушены при следующих значениях Ω:

$$\Omega = \frac{\pi n}{2h\sqrt{\rho a_{55}}} = \frac{\pi n}{2h}\sqrt{\frac{G_{13}}{\rho}}, \ \Omega = \frac{\pi n}{2h}\sqrt{\frac{G_{23}}{\rho}}, \ \Omega = \frac{\pi n}{2h}\sqrt{\frac{A_{11}}{\Delta\rho}}. \tag{1.10}$$

Эти значения Ω совпадают со значениями главных значений частот собственных колебаний ортотропных прямоугольных пластин со свободными лицевыми поверхностями ($\sigma_{13}(\zeta = \pm 1) = \sigma_{23}(\zeta = \pm 1) = \sigma_{33}(\zeta = \pm 1) = 0$). При таких значениях Ω будет возникать резонанс.

По сравнению со статической первой краевой задачей решение динамической задачи имеет ряд интересных свойств — оно полностью определилось после удовлетворения условий при $\zeta = \pm 1$. Этого нет в соответствующей статической задаче [1,2]. Асимптотика (1.4) принципиально отличается от асимптотики в статической задаче:

$$\begin{gathered} Q_{jk}^{int} = \varepsilon^{-q_Q+s} Q^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \ q_{\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}} = -2, \\ q_{\sigma_{xz}, \sigma_{yz}} = -1, \ q_{\sigma_{zz}} = 0, \ q_{u,v} = -2, \ q_w = -3. \end{gathered} \tag{1.11}$$

Поскольку решение внутренней динамической задачи полностью определилось, пограничный слой не будет влиять на решение внутренней задачи и будет устранять неувязку, возникающую на боковой поверхности. Пограничный слой строится указанным в [2,6,7] способом.

Если функции $\sigma_{jk}^{\pm}$ являются полиномами относительно ξ, η, итерационный процесс обрывается и получается математически точное решение внутренней задачи (слоя). В частности, при $\sigma_{xz}^{+}, \sigma_{yz}^{+}, \sigma_{zz}^{+} = \text{const}$, $\sigma_{xz}^{-}, \sigma_{yz}^{-}, \sigma_{zz}^{-} = 0$ итерационный процесс обрывается при $s = 0$ и получается решение

$$\begin{aligned}
u &= -\frac{h\sqrt{a_{55}}}{\Omega_* \sin 2\gamma_1}\sigma_{xz}^{+} \cos\gamma_1(1+\zeta)exp(i\Omega t), \\
v &= -\frac{h\sqrt{a_{44}}}{\Omega_* \sin 2\gamma_2}\sigma_{yz}^{+} \cos\gamma_2(1+\zeta)exp(i\Omega t), \\
w &= -\sqrt{\frac{\Delta}{A_{11}}}\frac{h}{\Omega_* \sin 2\gamma_3}\sigma^{+} zz \cos\gamma_3(1+\zeta)exp(i\Omega t), \\
\sigma_{xz} &= \frac{1}{\sin 2\gamma_1}\sigma_{xz}^{+} \sin\gamma_1(1+\zeta)exp(i\Omega t), \\
\sigma_{yz} &= \frac{1}{\sin 2\gamma_2}\sigma_{yz}^{+} \sin\gamma_2(1+\zeta)exp(i\Omega t), \\
\sigma_{zz} &= \frac{1}{\sin 2\gamma_3}\sigma_{zz}^{+} \sin\gamma_3(1+\zeta)exp(i\Omega t), \\
\sigma_{xx} &= -\frac{A_{23}}{A_{11}\sin 2\gamma_3}\sigma_{zz}^{+} \sin\gamma_3(1+\zeta)exp(i\Omega t), \\
\sigma_{yy} &= -\frac{A_{13}}{A_{11}\sin 2\gamma_3}\sigma_{zz}^{+} \sin\gamma_3(1+\zeta)exp(i\Omega t), \ \sigma_{xy} = 0.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Несложно выписать решения, соответствующие полиномам высоких степеней.

Институт механики НАН РА

Академик Л. А. Агаловян, Т. В. Закарян

О решении первой динамической пространственной краевой задачи для ортотропной прямоугольной пластинки

Асимптотическим методом определено решение первой динамической трехмерной краевой задачи для ортотропных пластин. Установлена асимптотика напряжений и перемещений, позволившая определить общее решение внутренней задачи. Выведены условия возникновения резонанса. Получены точные решения частных задач.

Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան, Տ. Վ. Զաքարյան

Օրթոտրոպ ուղղանկյուն սալի փարածական առաջին դինամիկական եզրային խնդրի լուծման մասին

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է առաձգականության տեսության տարածական դինամիկական առաջին եզրային խնդիրը օրթոտրոպ սալի համար: Գտնված է ասիմպտոտիկա լարումների թենզորի եւ տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների համար, որը սկզբունքորեն տարբերվում է համապատասխան ստատիկական խնդրի ասիմպտոտիկայից: Ցույց է տրված, որ ներքին խնդրի լուծումը լիովին որոշվում է, երբ բավարարվում են սալի դիմային մակերեւույթների վրա տրվող պայմանները: Արտածված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները: Ներքին խնդրի համար ստացված են ճշգրիտ լուծումներ այն դեպքերում, երբ սալի դիմային մակերեւույթների վրա տրվող ֆունկցիաները հանդիսանում են բազմանդամներ:

Academician L. A. Aghalovyan, T. V. Zakaryan

On Solution of the First Dynamic 3D Boundary Problem for Orthotropic Rectangular Plate

The solution of the first dynamic 3D boundary problem for orthotropic plates is obtained by the asympthotic method. The asympthotics of stresses and displacements, determining the general solution of inner problem, is established. The conditions of resonance initiation are reduced. The exact solutions of particular problems are obtained

Литература

1. *Гольденвейзер А.Л.* - Теория упругих тонких оболочек. М. Наука. 1976. 510 с.

2. *Агаловян Л.А.* - Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.

3. *Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.* - Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван. Изд.-во. "Гитутюн". НАН РА. 2005. 468 с.

4. *Агаловян Л.А.* - Изв. вузов РФ, Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. N3 С. 8-11.

5. *Агаловян Л.А.* - Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд-во. "Гитутюн". НАН РА. 2002. С. 9-19.

6. *Агаловян Л.А. Закарян Т.В.* - В сб.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван: 2007. С. 21-27.

7. *Агаловян Л.А.* - Успехи механики. Т. 3. Киев. А. С. К. 2007. С. 373-393.

8. *Лехницкий С. Г.* - Теория упругости анизотропного тела. М. Наука. 1977. 416 с.