

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

В. М. Белубекян¹, М. В. Белубекян²

Локализованные сдвиговые электроупругие волны при движении
слоя вдоль полупространства

(Представлено чл.-кор. НАН РА А.С. Аветисяном 25/V 2009)

Ключевые слова: *поверхностные волны, сдвиг, пьезоэлектрик, упругий слой, полупространство*

Рассматривается влияние движения слоя относительно полупространства на характер распространения поверхностной сдвиговой волны типа Гуляева – Блюстейна. Материалы слоя и полупространства – пьезоэлектрики класса бтт. Установлено, что существует определенная скорость равномерного движения слоя, превышение которой приводит к невозможности поверхностной волны. При малых скоростях возможны как одна, так и две различные скорости поверхностной волны.

1. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) полупространство занимает область $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y < \infty$, $-\infty < z < \infty$, и слой-область $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y < \delta$, $-\infty < z < \infty$ (рисунок).

Предполагается, что материалы слоя и полупространства принадлежат к различным пьезоэлектрикам класса бтт. Слой движется относительно полупространства по направлению оси OX с равномерной скоростью U .

Уравнения чисто сдвиговых волн для системы слой-полупространство, с учетом относительного движения слоя, имеют вид [1,2]

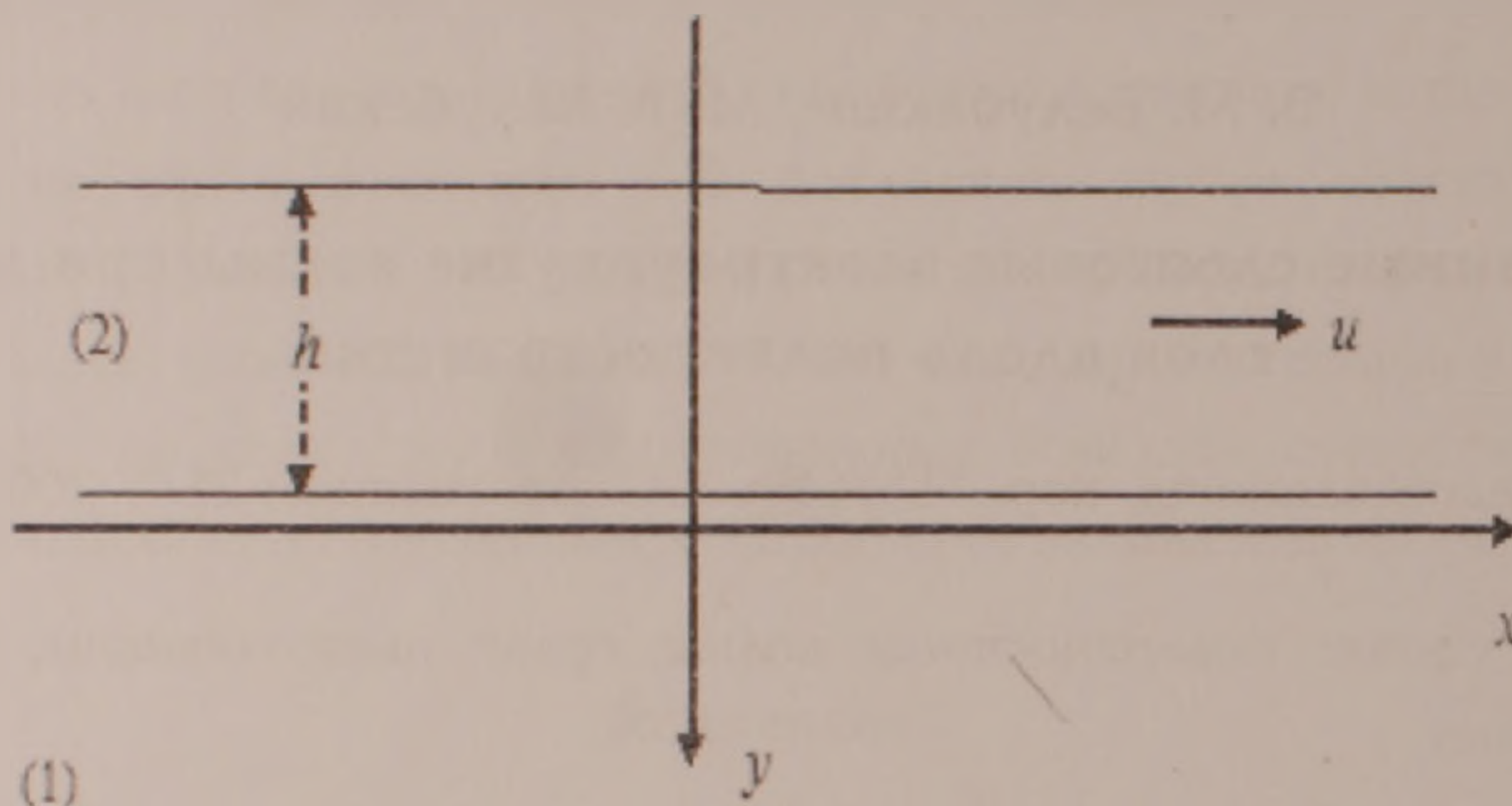
$$a_1^2 \Delta w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial t^2}, \quad \Delta \psi_1 = 0 \text{ при } y > 0, \quad (1.1)$$

$$a_2^2 \Delta w_2 = \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 w_2}{\partial t \partial x} + U^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}, \quad \Delta \psi_2 = 0 \text{ при } y < 0, \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} a_i^2 &= \frac{C_{44}^{(i)}}{\delta_i} (1 + \chi_j), \quad \chi_j = \frac{[l_{15}^{(i)}]^2}{\varepsilon_i C_{44}^{(i)}}, \quad \psi_j = \varphi_j - \frac{l_{15}^{(i)}}{\varepsilon_i} w_i \quad (i = 1, 2), \\ a_i^2 &= \frac{C_{44}^{(i)}}{\rho_i} (1 + \chi_j), \quad \chi_j = \frac{[e_{15}^{(i)}]^2}{\varepsilon_i C_{44}^{(i)}}, \quad \psi_j = \varphi_i - \frac{e_{15}^{(i)}}{\varepsilon_i} w_i \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.3)$$

w_i — упругие перемещения, φ_i — электрические потенциалы, $c_{44}^{(i)}$ — модули сдвига, χ_i — коэффициенты электромеханической связи полупространства и слоя соответственно.



Условия контакта между слоем и полупространством задаются в виде

$$\sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)} = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad D_2^{(1)} = D_2^{(2)} \quad \text{при } y = 0, \quad (1.4)$$

где $\sigma_{23}^{(i)}$ — касательные напряжения, $D_2^{(i)}$ — нормальные компоненты индукции электрического поля.

В общем случае на свободной поверхности слоя $y = -h$ должны быть заданы условия равенства нулю касательного напряжения, условия непрерывности потенциалов и нормальных компонентов индукции электрического поля слоя и внешней среды $y < -h$. Однако здесь будут рассматриваться два предельных варианта граничных условий, для которых не требуется решать уравнения электродинамики для среды $y < -h$ [1]. Первое условие применяется как приближение, когда коэффициент диэлектрической проницаемости среды $y < -h$ [1] значительно меньше проницаемости материала слоя:

$$\sigma_{23}^{(2)} = 0, \quad D_2^{(2)} = 0 \quad \text{при } y = -h. \quad (1.5)$$

Второе условие соответствует случаю, когда свободная граница слоя металлизирована и заземлена:

$$\sigma_{23}^{(2)} = 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{при } y = -h. \quad (1.6)$$

Требуется найти решение уравнений (1.1), (1.2), удовлетворяющее граничным условиям (1.4), (1.5) или (1.6) и следующим условиям затухания:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} w_1 = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \psi_1 = 0. \quad (1.7)$$

Общее решение уравнений (1.1) в виде гармонических волн, удовлетворяющее условиям затухания (1.7), получается в виде

$$w_1 = A_1 e^{-k\gamma_1 y} \exp i(\omega t - kx), \quad (1.8)$$

$$\psi_1 = B_1 e^{-ky} \exp i(\omega t - kx),$$

$$\varphi_1 = [B_1 e^{-ky} + \frac{e_{15}^{(1)}}{\epsilon_1} A_1 e^{-k\gamma_1 y}] \exp i(\omega t - kx)$$

при условии

$$-1 < \eta < 1. \quad (1.9)$$

Общее же решение условий уравнений (1.2) следующее:

$$w_2 = (A_2 e^{\gamma_2 ky} + C_2 e^{-\gamma_2 ky}) \exp i(\omega t - kx), \quad (1.10)$$

$$\psi_2 = (B_2 e^{ky} + F e^{-ky}) \exp i(\omega t - kx),$$

$$\varphi_2 = [B_2 e^{ky} + F e^{-ky} + \frac{e_{15}^{(2)}}{\epsilon_2} (A_2 e^{\gamma_2 ky} + C_2 e^{-\gamma_2 ky})] \exp i(\omega t - kx).$$

В (1.8) - (1.10) A_i, B_i, C_2, F — произвольные постоянные.

$$\gamma_1 = \sqrt{1 - \eta^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{1 - \theta^2(\eta - p)}, \quad (1.11)$$

$$\eta^2 = \frac{\omega^2}{k^2 a_1^2}, \quad \theta^2 = \frac{a_2^2}{a_1^2}, \quad p = \frac{U}{a_2}.$$

2. Используя функциональные связи [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(i)} &= C_{44}^{(i)} \frac{\partial w_i}{\partial y} + e_{15}^{(i)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \\ D_2^{(i)} &= \epsilon \frac{\partial w_i}{\partial y} + e_{15}^{(i)} \frac{\partial w_i}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

граничные условия (1.4) - (1.6) приведем к виду

$$\bar{C}_{44}^{(i)} \frac{\partial w_i}{\partial y} + e_{15}^{(i)} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \quad \text{при } y = -h, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = -h \quad (2.3)$$

или

$$\bar{C}_{44}^{(2)} \frac{\partial w_2}{\partial y} + e_{15}^{(i)} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{при } y = -h. \quad (2.4)$$

Подстановка (1.8) и (1.10) в граничные условия (2.2) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\gamma_1 A_1 + \frac{e_{15}^{(1)}}{\tilde{C}_{44}^{(1)}} B_1 &= 0, \quad -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} B_2 = B_2 - F, \\ \gamma_2 (A_2 - C_2) + \frac{e_{15}^{(2)}}{\tilde{C}_{44}^{(2)}} (B_2 - F) &= 0, \\ B_1 + \frac{e_{15}^{(1)}}{\varepsilon_1} A_1 &= B_2 + F + \frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_2} (A_2 + C_2).\end{aligned}\quad (2.5)$$

Удовлетворение граничным условиям (2.3) дает дополнительные уравнения

$$\begin{aligned}A_2 e^{\gamma_2 \zeta} - C_2 e^{-\gamma_2 \zeta} &= 0, \quad \zeta = kh, \\ B_2 e^\zeta - F e^{-\zeta} &= 0.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Система шести уравнений (2.5), (2.6) относительно произвольных A_i , B_i , C_2 , F является однородной алгебраической системой.

Для варианта граничных условий (2.4) уравнения (2.6) заменяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\gamma_2 (A_2 e^{-\gamma_2 \zeta} - C_2 e^{\gamma_2 \zeta}) + \frac{e_{15}^{(2)}}{\tilde{C}_{44}^{(2)}} (B_2 e^{-\zeta} - F e^\zeta) &= 0, \\ B_2 e^{-\zeta} + F e^\zeta + \frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_2} (A_2 e^{-\gamma_2 \zeta} + C_2 e^{\gamma_2 \zeta}) &= 0.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Из уравнений (2.5) постоянные A_2 и C_2 определяются посредством B_2 и F следующим образом:

$$\begin{aligned}A_2 &= -\frac{\varepsilon_2}{2e_{15}^{(2)}} [(1 + R_1 + R_2)B_2 + (1 - R_1 - R_2)F], \\ C_2 &= -\frac{\varepsilon_2}{2e_{15}^{(2)}} [(1 + R_1 - R_2)B_2 + (1 - R_1 + R_2)F],\end{aligned}\quad (2.8)$$

где

$$R_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\chi_1 \gamma_1^{-1}}{1 + \chi_1} \right), \quad R_2 = \frac{\chi_2 \gamma_2^{-1}}{1 + \chi_2}.\quad (2.9)$$

Подстановка (2.8) в систему (2.6) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных B_2 и F

$$\begin{aligned}[(1 + R_1)sh\gamma_2 \zeta + R_2 ch\gamma_2 \zeta]B_2 + [(1 - R_1)sh\gamma_2 \chi \zeta - R_2 ch\gamma_2 \zeta]F &= 0, \\ B_2 e^\zeta - F e^{-\zeta} &= 0.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Условия равенства нулю детерминанта системы (2.10) после некоторых преобразований приводят к виду

$$(ch\zeta - R_1 sh\zeta)sh\gamma_2\zeta - R_2 sh\zeta ch\gamma_2\zeta = 0. \quad (2.11)$$

Для варианта граничных условий (2.4) подстановка (2.8) в (2.6) приводит к системе

$$\begin{aligned} & [(1 + R_1)sh\gamma_2\zeta - R_2 ch\gamma_2\zeta + \frac{\chi_2\gamma_2^{-1}}{1 + \chi_2}e^{-\zeta}]B_2 + \\ & + [(1 - R_1)sh\gamma_2\zeta + R_2 ch\gamma_2\zeta - \frac{\chi_2\gamma_2^{-1}}{1 + \chi_2}e^{-\zeta}]F = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$[(1 + R_1)ch\gamma_2\zeta - R_2 sh\gamma_2\zeta - e^{-\zeta}]B_2 + [(1 - R_1)ch\gamma_2\zeta + R_2 sh\gamma_2\zeta - e^{\zeta}]F = 0.$$

Отсюда соответствующее дисперсионное уравнение получается в виде

$$\begin{aligned} & \chi_2\gamma_2^{-1}(1 + \chi_2)^{-1}[(ch\zeta + R_1 ch\zeta)ch\gamma_2\zeta - R_2 sh\zeta sh\gamma_2\zeta - 1] - \\ & - (sh\zeta + R_1 ch\zeta)sh\gamma_2\zeta + R_2(ch\zeta ch\gamma_2\zeta - 1) = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В частном случае $U = 0$ ($p = 0$) из (2.13) получаются соответствующие дисперсионные уравнения [3].

3. В приближении очень тонкого слоя (длинноволновое приближение)

$$\zeta \ll 1 \quad (3.1)$$

из дисперсионного уравнения (2.1) получается следующее уравнение:

$$\gamma_2 - R = 0. \quad (3.2)$$

С учетом (1.11) и (2.9) уравнение (3.2) имеет решение

$$\eta = p \pm \theta^{-1}(1 + \chi_2)^{-1/2}. \quad (3.3)$$

Решение (3.3) будет удовлетворять условиям затухания (1.9), если имеют место ограничения

$$\theta > (1 + \chi_2)^{-1/2}, \quad p < 1 - \theta^{-1}(1 + \chi_2)^{-1/2}. \quad (3.4)$$

Таким образом, в случае граничных условий (1.5) и в длинноволновом приближении (3.1) поверхностная волна будет существовать, если выполняются условия (3.4).

В приближении (3.1) уравнение (2.13) сводится к виду

$$R_1[\chi_2(1 + \chi_2)^{-1}\gamma_2^{-1} - \gamma_2] = 0. \quad (3.5)$$

В этом случае, т.е. при граничных условиях (1.5), задача имеет два решения

$$R_1 = 0 \Rightarrow \eta = \pm \sqrt{1 + \chi_1^2(1 + \chi_1^{-2})} \quad (3.6)$$

и решение вида (3.3), которое справедливо, если выполняются условия (3.4). Решение (3.6) соответствует скорости распространения волны Гуляева — Блюстейна [1].

¹Ереванский государственный университет

²Институт механики НАН РА

В. М. Белубекян, М. В. Белубекян

Локализованные сдвиговые электроупругие волны при движении слоя вдоль полупространства

Исследуется влияние движения слоя относительно полупространства на характер распространения поверхностной электроупругой волны типа Гуляева — Блюстейна. Материалы слоя и полупространства — пьезоэлектрики класса 6mm. Установлена возможность существования поверхностных волн с двумя различными скоростями.

Վ. Մ. Բելուբեկյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան

Տեղայնացված սահքի էլեկտրաառաձգական ալիքները շերտի կիսափարածության նկատմամբ շարժման ընթացքում

Հետազոտված է կիսափարածության նկատմամբ շերտի շարժման ազդեցությունը Գուլյաև-Բլյուստեյնի տիպի մակերեւութային էլեկտրաառաձգական ալիքի փարածման բնույթի վրա: Շերտի եւ կիսափարածության նյութերը պատկանում են 6mm դասի պլեզոէլեկտրիկներին: Հաստատված է երկու փարբեր արագություններով մակերեւութային ալիքների գոյության հնարավորությունը:

V. M. Belubekyan, M. V. Belubekyan

Localized Shear Electroelastic Waves in the Case of the Motion of the Layer Along the Semispace

The influence of the motion of the layer relatively to the semispace on the Guljaev — Bleustein type surface electroelastic wave propagation is investigated. The materials of

the layer and semispace belong to the class 6mm. The existence of the surface waves with two different speeds is shown.

Литература

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск, Наука. 1982. 239 с.
2. Белубекян М.В., Белубекян В.М. - Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т. 47. N 3-4. С. 78-82.
3. Белубекян М.В., Белубекян В.М. - Ученые записки ЕГУ, Естест. н. 2006. N 3. С. 25-30.