

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՌԻՏԴ 514.11

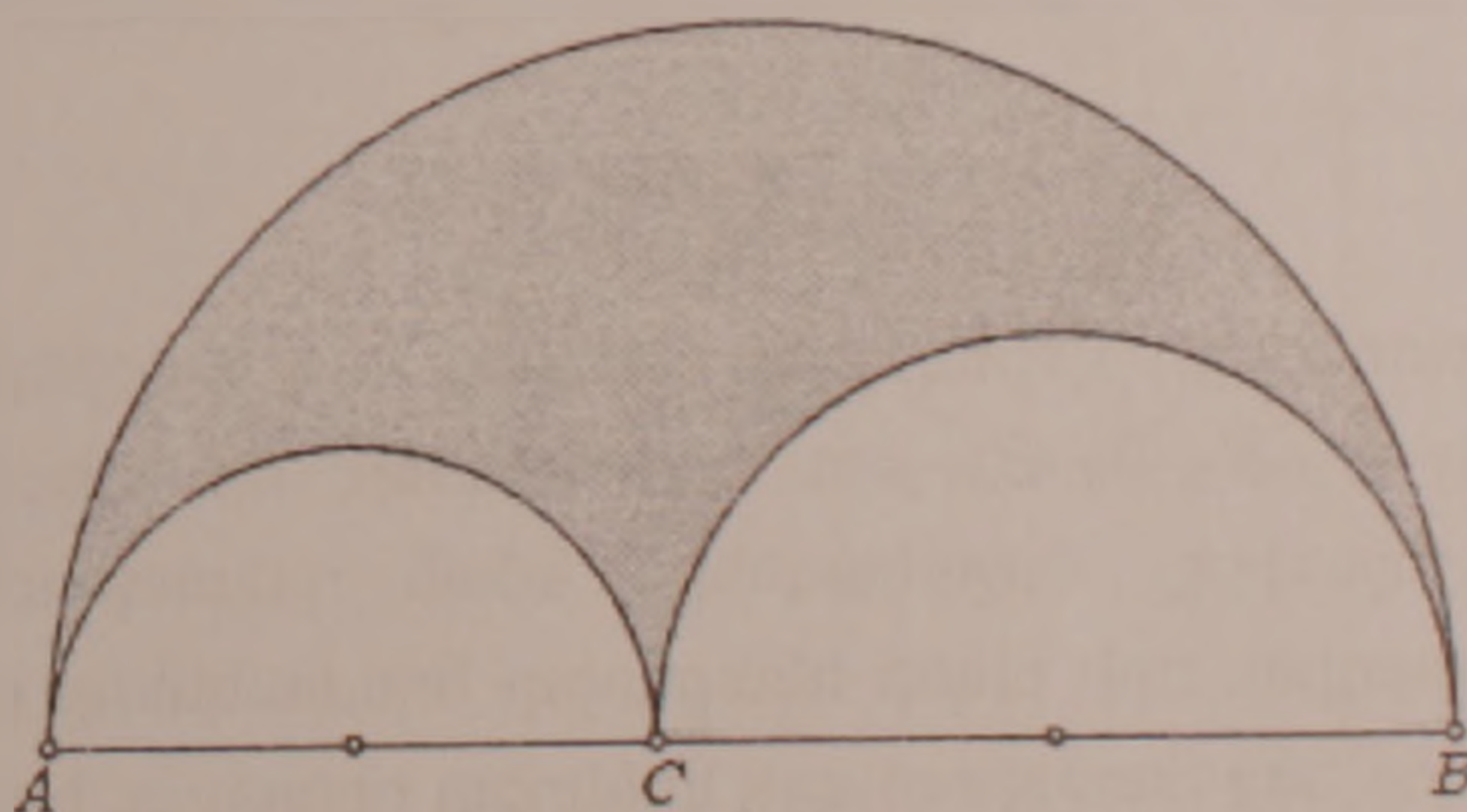
Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Ա. Ն. Առաքելյան

Արբելուսին ներգծած Պապի շրջանագծերի հաջորդականության
 վերաբերյալ

(Ներկայացված է 14/VIII 2009)

Առանցքային բառեր. *Արբելուս, Պապի շրջա, Դեկարտի թեորեմ*

1. Ներածություն: Վերջին տասնամյակների ընթացքում զգալիորեն մեծացել է երկրաչափների հետաքրքրությունը Արբիմեդի կողմից Արբելուս անվանված պատկերի նկարմամբ [1-4] (տե՛ս նկ.1): Այս պատկերի համար բազմաթիվ ուշագրավ հատկություններ են բացահայտվել, որոնցից մի քանիսը նկարագրված են [5,6] աշխատանքներում: Մասնավորապես [5]-ում հաշվված է Արբելուսին ներգծած շրջանագծի շառավիղը, իսկ [6]-ում բերված է Պապի թեորեմի ապացույցը, որը վերաբերում է Արբելուսին ներգծած Պապի շրջանագծերի հաջորդականությանը (Պապի շրջա):



Նկ. 1:

Արբելուսի AB տրամագիծ ունեցող w_{AB} կիսաշրջանագծի շառավիղը նշանակենք R -ով, իսկ AC տրամագիծ ունեցող w_{AC} ձախ կիսաշրջանագծինը՝ r -ով: Ուստի պարզ է, որ CB տրամագիծ ունեցող w_{CB} կիսաշրջանագծի շառավիղը կլինի $R - r$:

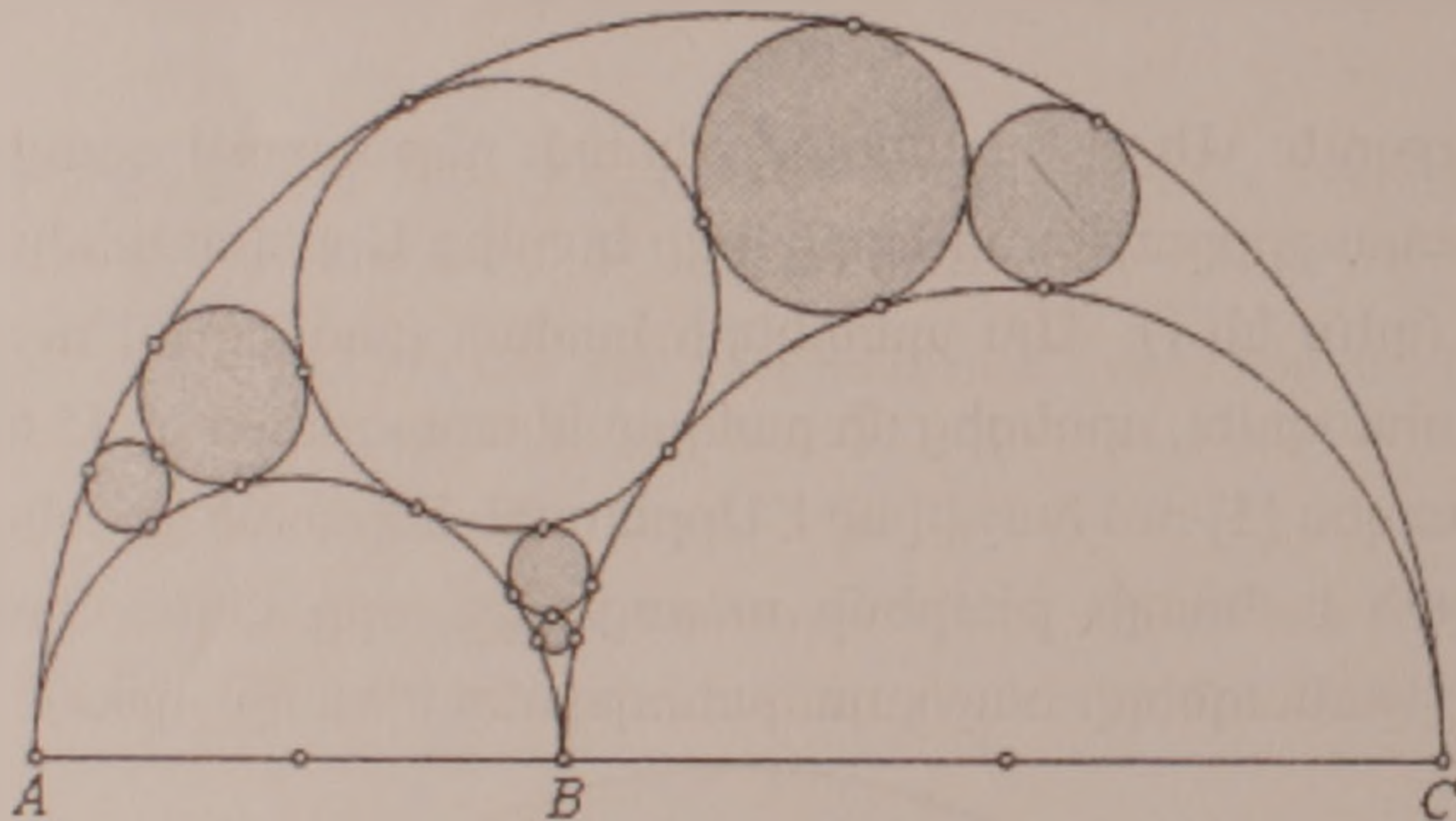
Եթե Արբելուսին ներգծած w_1 շրջանագծին միացնենք անվերջ հաջորդականությամբ w_i ($i = 1, 2, \dots$) շրջանագծեր, որոնցից յուրաքանչյուրը շոշափում է

հարեւան w_{i-1} եւ w_{i+1} շրջանագծերը, ինչպես նաեւ Արբելոսը սահմանափակող երկու աղեղները, ապա ստացված շրջանագծերի հաջորդականությունը կանվանենք Պապի շղթա: Նկատենք, որ կամայական Արբելոսի համար կարելի է կառուցել երեք փարբեր Պապի շղթաներ (տե՛ս նկ.2): Նշանակենք A , B եւ C կետերին ձգվող Պապի շղթաները համապատասխանաբար Ω_A, Ω_B եւ Ω_C սիմվոլներով: Նշենք, որ, ըստ էության, Պապի թեորեմը վերաբերվում է միայն Ω_A եւ Ω_B շղթաներին, եւ համաձայն այդ շղթաների n -րդ ($n = 1, 2, \dots$) շրջանագծերի համար [4]-ում եւ [6]-ում ստացված բանաձեւերի, փեղի ունեն հետեւյալ առնչությունները՝

$$R_n^A = \frac{R \cdot r \cdot (R - r)}{n^2 r^2 + R \cdot (R - r)}; \quad (1)$$

$$R_n^B = \frac{R \cdot r \cdot (R - r)}{n^2 (R - r)^2 + R \cdot r}; \quad (2)$$

Սույն աշխատանքում ստանում ենք (1), (2) բանաձեւերի նմանակը Ω_C շղթայի n -րդ $n = 1, 2, \dots$ շրջանագծի R_n^C շառավղի համար՝ օգտվելով Դեկարտի թեորեմից եւ կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը:



Նկ. 2:

2. Դեկարտի թեորեմը: Դիտարկենք միմյանց վեց փարբեր կետերում փոխադարձաբար շոշափող B_1, B_2, B_3, B_4 չորս շրջանագծեր, որոնցից ցանկացած երեքը չունեն ընդհանուր շոշափող: Շրջանագծերի նման դասավորությունը կոչվում է Դեկարտի կոնֆիգուրացիա, որի բոլոր հնարավոր եղանակները բերված են նկար 3-ում: Այսպեղ հնարավոր ենք համարում այն կոնկրետ դեպքերը, երբ որոշ շրջանագծեր ուղիղներ են: Նշանակենք B_i ($i = \overline{1, 4}$) շրջանագծի շառավիղը r_i -ով, իսկ դրանց համապատասխան կորությունները (շրջանագծի շառավղի հակադարձ մեծությունը կոչվում է շրջանագծի կորություն)՝ $\beta_i = 1/r_i$, $i = \overline{1, 4}$: Ենթադրվում է, որ ուղիղն ունի անվերջ շառավիղ, հետեւաբար դրա կորությունը գրո է:

Դեկարտի կոնֆիգուրացիաներում շրջանագծերի շառավիղների միջեւ առնչությունների բացահայտումը հնագույն խնդիրներից է: Օրինակ, Արքիմեդը Արբելոսն

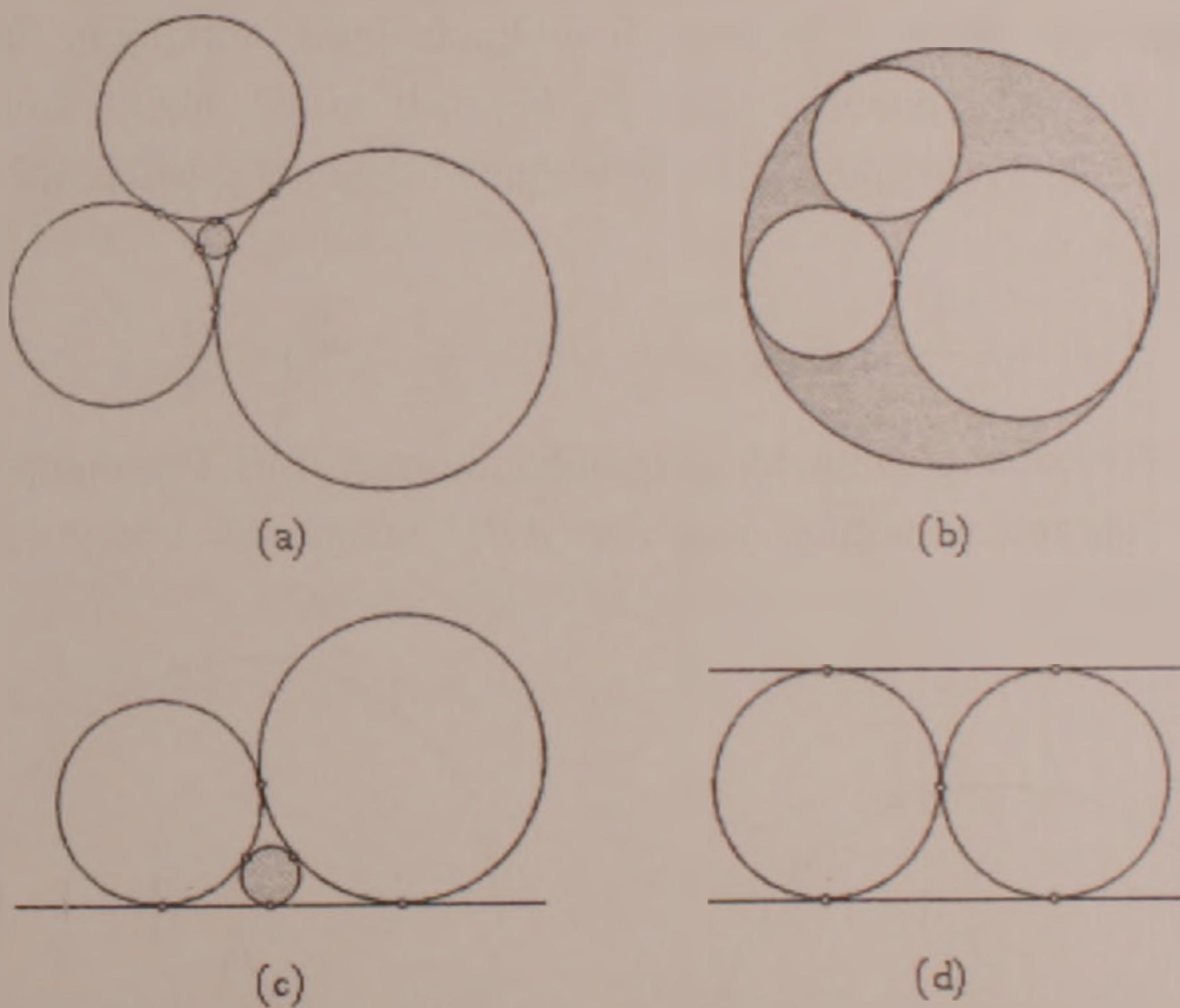
ուսումնասիրելիս ստացել է որոշ առնչություններ (c) փափկ կոնֆիգուրացիայի մի քանի մասնավոր դեպքերում [7]:

1643թ. Ռ. Դեկարը նշում է մի առնչություն չորս շառավիղների միջև, որի բովանդակությունը, շրջանագծերի կորությունների փերմիններով, արտահայտված է հետևյալ թեորեմում:

Թեորեմ (Դեկար): Դեկարի կոնֆիգուրացիայում միմյանց փոխադարձաբար շոշափող շրջանագծերի կորությունները բավարարում են հետևյալ առնչությանը՝

$$\sum_{i=1}^4 \beta_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^4 \beta_i \right)^2 : \quad (3)$$

Դեկարը դիտարկում էր միայն (a) փափկ կոնֆիգուրացիան, սակայն նրա թեորեմը կիրառելի է բոլոր՝ (a)-(d) փափկերի կոնֆիգուրացիաների դեպքում, եթե միայն շրջանագծերի կորությունների համար սահմանենք որոշակի նշաններ հետևյալ կերպ. եթե կոնֆիգուրացիային մասնակցող B_i շառավղով շրջանագիծը մյուսների հետ ունի միայն արտաքին շոշափում, ապա դրա կորությունը կընդունենք հավասար $1/r_i$, եւ $-1/r_i$, եթե այն մյուսների հետ ունի միայն ներքին շոշափում:

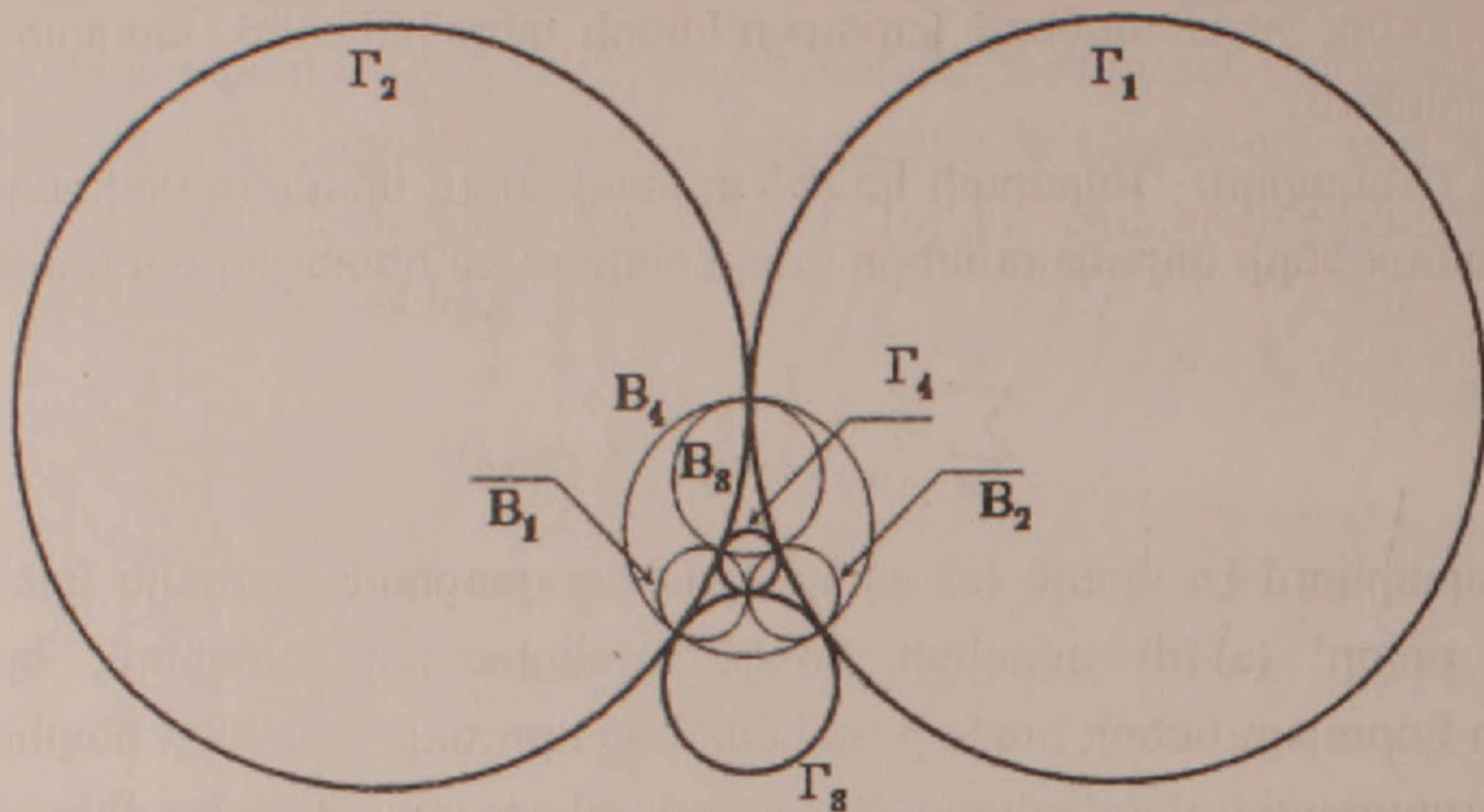


Նկ. 3:

Մաթեմատիկական գրականության մեջ հաճախ են հանդիպում Դեկարի թեորեմի ամենապարբեր ապացույցներ, որոնցից մի քանիսին կարելի է ծանոթանալ, օրինակ, [8,9] աշխատանքներում: Սակայն, սույն աշխատանքում բերում ենք այս թեորեմի այնպիսի ապացույց, որի ընթացքում ավելի բացահայտ է դառնում Դեկարի կոնֆիգուրացիաների խորհրդավորությունը:

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ B_i , $i = \overline{1,4}$ շրջանագծերը որոշում են Γ_i չորս շրջանագծերի մեկ այլ կոնֆիգուրացիա, որոնք միմյանց փոխադարձաբար

շոշափում են միեւնույն վեց կետրերում (տես՝ նկ. 4): Ընդ որում Γ_1 -ն անցնում է B_2, B_3, B_4 շրջանագծերի շոշափումների երեք կետրերով, Γ_2 -ն՝ B_1, B_3, B_4 շրջանագծերի շոշափումների երեք կետրերով եւ այլն: Նշանակենք Γ_i շրջանագծի կորությունը γ_i -ով:

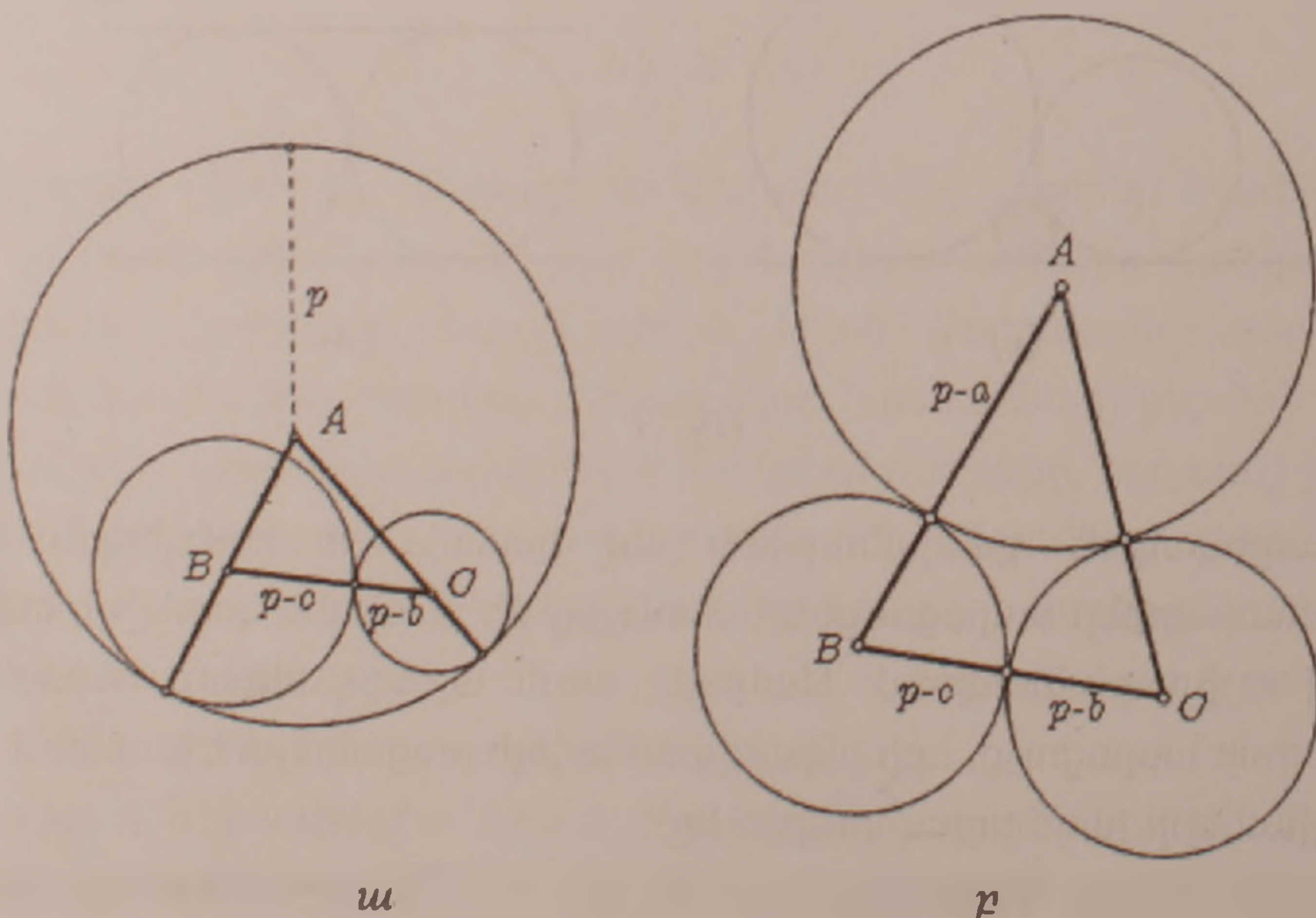


Նկ. 4:

Դժվար չէ նկատել, որ եթե B_1, B_2, B_3 շրջանագծերի կենտրոնները կազմում են ABC եռանկյունը, ապա Γ_4 -ը այդ եռանկյան կամ ներգծյալ, կամ առգծյալ շրջանագիծն է: Մասնավորապես, եթե B_1, B_2, B_3 -ն ունեն նկար 5, ա-ում բերված դասավորությունը, ապա Γ_4 -ը կլինի ABC եռանկյան ներգծյալ շրջանագիծը: Այս դեպքի համար կունենանք՝

$$\beta_1 = \frac{1}{p-a} : \beta_2 = \frac{1}{p-b} : \beta_3 = \frac{1}{p-c}, \gamma_4 = \mp \frac{1}{r},$$

Որտեղ a, b, c -ն ABC եռանկյան համապատասխանաբար A, B, C գագաթների դիմացի կողմերն են, p -ն՝ կիսապարագիծը, իսկ r -ը՝ ABC եռանկյան ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը:



Նկ. 5:

Այժմ, եթե B_1, B_2, B_3 շրջանագծերն ունեն նկար 5,բ-ում պատկերված դասավորությունը, ապա Γ_4 -ը կլինի ABC եռանկյան առգծյալ շրջանագիծ եւ կունենանք՝

$$\beta_1 = -\frac{1}{p}; \beta_2 = +\frac{1}{p-b}; \beta_3 = \frac{1}{p-c}; \gamma_4 = \pm \frac{1}{r_a},$$

որտեղ r_a -ն ABC եռանկյան A գագաթին հանդիպակաց առգծյալ շրջանագծի շառավիղն է:

Կիրառելով ներգծյալ եւ առգծյալ շրջանագծերի շառավիղների համար

$$r^2 = \left(\frac{S}{p}\right)^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \text{ եւ } r_a^2 = \left(\frac{S}{p-a}\right)^2 = \frac{p \cdot (p-c)(p-b)}{p-a}$$

հայտնի բանաձեւերը՝ վերոհիշյալ երկու դեպքերում էլ ստանում ենք հետեւյալ առնչությունը՝

$$\beta_1 \cdot \beta_2 + \beta_1 \cdot \beta_3 + \beta_2 \cdot \beta_3 = \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3}\right) \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 = \gamma_4^2: \quad (4)$$

Հանգումորեն կարելի է ցույց տալ, որ

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 + \gamma_1 \cdot \gamma_3 + \gamma_2 \cdot \gamma_3 = \beta_4^2: \quad (5)$$

Պարզ է, որ (4) եւ (5) առնչություններում 1,2,3,4 ինդեքսների տեղափոխությունը կրկին կբերի հավասարության, ուստի

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^4 \beta_i\right)^2 &= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 + 2\beta_1\beta_2 + 2\beta_1\beta_3 + \\ &+ 2\beta_1\beta_4 + 2\beta_2\beta_3 + 2\beta_2\beta_4 + 2\beta_3\beta_4 = \sum_{i=1}^4 \beta_i^2 + \sum_{i=1}^4 \gamma_i^2: \end{aligned} \quad (6)$$

Քանի որ վերջին հավասարության աջակողմյան մասը սիմետրիկ է β_i -ի եւ γ_i -ի նկատմամբ, ապա կարող ենք պնդել, որ այն հավասար է նաեւ $\left(\sum_{i=1}^4 \gamma_i\right)^2$, այսինքն՝

$$\left(\sum_{i=1}^4 \gamma_i\right)^2 = \sum_{i=1}^4 \beta_i^2 + \sum_{i=1}^4 \gamma_i^2: \quad (7)$$

Հավասարություններ (6)-ից եւ (7)-ից անմիջապես ստանում ենք

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 > 0$$

առնչությունը: Այժմ կադարելով ձեւափոխությունների հետեւյալ շղթան՝

$$\begin{aligned} (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \beta_4) \cdot (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4) &= (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)^2 - \beta_4^2 = \\ &= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - \beta_4^2 + 2\gamma_4^2 = \\ &= (\gamma_2\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4) + (\gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4) + (\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_4) - \\ &\quad - (\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3) + 2\gamma_4^2 = \\ &= 2(\gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4) + 2\gamma_4^2 = 2\gamma_4(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4), \end{aligned}$$

կստանանք

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 = 2\gamma_4, \quad (8)$$

որտեղից 1,2,3,4 ինդեքսների տեղափոխության շնորհիվ կստանանք 4 նմանատիպ առնչություններ, որոնց երկու կողմերը բարձրացնելով քառակուսի եւ գումարելով դրանց համապատասխան կողմերը, կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^4 \beta_i^2 = \sum_{i=1}^4 \gamma_i^2 :$$

Նկատի ունենալով այս առնչությունը՝ (6)-ից անմիջապես ստանում ենք թեորեմի ապացույցը.

$$\left(\sum_{i=1}^4 \beta_i\right)^2 = \sum_{i=1}^4 \beta_i^2 + \sum_{i=1}^4 \gamma_i^2 = 2 \sum_{i=1}^4 \beta_i^2 :$$

3. Համաձայն 1-ում կատարված նշանակումների տեղի ունի հետևյալը:

Թեորեմ: Արբելուսին ներգծած Պապի շրջանագծերի Ω_c շղթայի n -րդ շրջանագծի R_n^c շառավղի համար՝

$$R_n^c = \frac{R \cdot r \cdot (R - r)}{n^2 R^2 - r \cdot (R - r)} : \quad (9)$$

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար օգտվենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից: $n = 1$ դեպքում ունենք

$$R_1^c = \frac{R \cdot r \cdot (R - r)}{R^2 - r \cdot (R - r)}, \quad (10)$$

հետևաբար այս դեպքում պնդումը ճիշտ է, քանի որ Պապի շղթայի առաջին շրջանագիծը հենց Արբելուսին ներգծած շրջանագիծն է, որի շառավղի համար տեղի ունի (10) բանաձևը (տե՛ս, օրինակ, [6]):

Այժմ ենթադրենք, որ (9) բանաձևը ճիշտ է ցանկացած $k \leq n$ բնական թվի համար եւ ցույց տանք, որ այն ճիշտ է նաեւ $(n + 1)$ -ի համար: Նկատենք, որ Պապի Ω_c շղթայի w_n, w_{n+1} շրջանագծերը Արբելուսի w_{AC} եւ w_{CB} շրջանագծերի հետ մեկտեղ կազմում են Դեկարտի կոնֆիգուրացիա, հետևաբար, կիրառելով Դեկարտի թեորեմը, կստանանք՝

$$2(\beta_n^2 + \beta_{n+1}^2 + \beta_{AC}^2 + \beta_{CB}^2) = (\beta_n + \beta_{n+1} + \beta_{AC} + \beta_{CB})^2 \quad (11)$$

որտեղ $\beta_4, \beta_{n+1}, \beta_{AC}, \beta_{CB}$ մեծությունները $w_n w_{n+1}, w_{AC}, w_{CB}$ շրջանագծերի կորություններն են:

Ակնհայտ է, որ (11)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\beta_{n+1}^2 - 2\beta_{n+1}(\beta_n + \beta_{AC} + \beta_{CB}) + \beta_n^2 + \beta_{AC}^2 + \beta_{CB}^2 - 2(\beta_n \beta_{AC} + \beta_{AC} \beta_{CB} + \beta_n \beta_{CB}) = 0 :$$

Լուծելով այս քառակուսի հավասարումը՝ կստանանք.

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \beta_{AC} + \beta_{CB} + 2\sqrt{\beta_n \beta_{AC} + \beta_{AC} \beta_{CB} + \beta_n \beta_{CB}} :$$

Վերջին հավասարության մեջ փեղադրելով $\beta_{AC} = \frac{1}{r}$, $\beta_{BC} = \frac{1}{R-r}$ եւ $\beta_n = \frac{R \cdot r(R-r)}{n^2 R^2 - r \cdot (R-r)}$ ՝ կունենանք՝

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \frac{n^2 R^2 - r(R-r)}{R \cdot r(R-r)} + \frac{1}{r} + \frac{1}{R-r} + \\ &+ 2\sqrt{\frac{n^2 R^2 - r(R-r)}{R \cdot r^2(R-r)} + \frac{1}{r(R-r)} + \frac{n^2 R^2 - r(R-r)}{R \cdot r(R-r)^2}} = \\ &= \frac{n^2 R^2 + R^2 - r(R-r)}{R \cdot r(R-r)} + \frac{2nR}{r(R-r)} = \frac{(n+1)^2 R^2 - r(R-r)}{R \cdot r(R-r)} : \end{aligned}$$

Հետևաբար

$$R_{(n+1)}^c = \frac{1}{\beta_{n+1}} = \frac{R \cdot r(R-r)}{(n+1)2R^2 - r(R-r)} :$$

Այս առնչությունից բխում է, որ (9) պնդումը ճիշտ է նաեւ $(n+1)$ -ի համար, ուստի այն ճիշտ է ցանկացած $n \geq 1$ ամբողջ թվի համար:

Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Ա. Ն. Առաքելյան

Արբելոսին ներգծած Պապի շրջանագծերի հաջորդականության վերաբերյալ

Դիտարկվում է Արբելոսին ներգծած Պապի շրջանագծերից եւս մեկ հաջորդականություն: Այդ հաջորդականության n -րդ շրջանագծի շառավղի համար սրացվում են որոշ առնչություններ արտահայտված Արբելոսին ներգծած շրջանագծի շառավղի միջոցով:

Академик В. С. Захарян, А. Г. Аракелян

О последовательности окружностей Паппа, вписанных в Арбелос

Рассматривается еще одна последовательность окружностей Паппа, вписанных в Арбелос. С помощью теоремы Декарта о конфигурации четырех окружностей получаем соотношение для радиуса n -й окружности данной последовательности в терминах радиуса вписанной окружности Арбелоса.

Academician V. S. Zakaryan, A. H. Arakelyan

On Pappus Chains Inside Arbelos

Another infinite chain of Pappus circles inscribed inside the Arbelos is considered. By means of Descartes' theorem the identity involving the radius of n -th circle of the chain and the incircle radius is obtained.

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Dodge C.W., Schoch T., Woo P.Y., Yiu P. - Math. Mag. 1999. V. 72. P. 202-213.
2. Power F. - Forum Geom. 2005. V. 5. P. 133-134.
3. Woo P.Y. - Forum Geom. 2001. V. 1. P. 133-136.
4. Bankoff L. - In: The Lighter Side of Mathematics. ed. R.K. Guy and R.E. Woodrow, Mathematical Association of America. 1994. P. 247-253.
5. Ջարիրյան Վ., Առաքելյան Ա. - Բնագետ, 2003, N5-6. էջ 61-68:
6. Ջարիրյան Վ., Առաքելյան Ա. - Բնագետ, 2003, N3-4. էջ 43-48:
7. Архимед. Соч. Гос. изд. ФМ. литературы. М. 1962. 637 с.
8. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. М. 1998.
9. Coxeter H. S. M. Introduction to Geometry, Second Edition. New York. John Wiley and Sons. 1969.