ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 109 2009 № 3

ФИЗИКА

УДК 539.1

Л. Р. Седракян

Метод погружения для задачи N-канального рассеяния

(Представлено академиком Д.М.Седракяном 4/V 2009)

Ключевые слова: *метод погружения, многоканальное рассеяние*

1. Введение. В [1, 2] сформулирована задача рассеяния квантовой частицы на двумерном потенциале $U(x,y)$. Показано, что уравнение Шредингера удобно представить в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi(x,y)+(\chi^2-V(x,y))\Psi(x,y)=0, \tag{1}$$

где

$$\frac{2M}{\hbar^2}E=\chi^2, \quad \frac{2M}{\hbar^2}U(x,y)=V(x,y). \tag{2}$$

Решение уравнения (1) с граничными условиями $V(x,0)=V(x,a)=\infty$ ищется в виде

$$\Psi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(x)\Phi_n(y), \tag{3}$$

где

$$\Phi_n=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot ny\right), \quad n=1,2,\dots . \tag{4}$$

Подставляя решение (3) в уравнение (1), получим систему уравнений для определения функций $\Psi_m(x)$

$$\frac{d^2\Psi_m(x)}{dx^2}+\kappa_m^2\Psi_m(x)-\sum_n V_{m,n}\Psi_n(x)=0, \quad m=1,2,\dots, \tag{5}$$

где

$$\kappa_m^2 = \chi^2 - \chi_m^2, \quad \chi_m = \frac{\pi}{a} m,$$

$$V_{m,n}(x) = \int_0^a \Phi_m^*(y) V(x,y) \Phi_n(y) dy, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Фактически частица в направлении y совершает колебательное движение с дискретной энергией $E_m = \frac{\hbar^2}{2m}\chi_m^2$, а в направлении x может рассеиваться на потенциалах $\bar{V}_{mn}(x)$. Таким образом, в отличие от задач рассеяния в одномерном случае, двумерное рассеяние при такой постановке задачи сводится к одномерному-многоканальному рассеянию.

2. Уравнение Шредингера для многоканальной задачи рассеяния. В [2] рассмотрено рассеяние частицы на потенциале $V(x,y)$ при предположении, что начальная энергия продольного движения достаточна, чтобы возбудить квантовое состояние до $m = 2$ Обобщим полученные в этой работе результаты для случая, когда продольная энергия частицы достаточна для возбуждения квантовых состояний до $m = N$. В этом случае рассеяние будет N-канальным.

Будем также предполагать, что движение частицы по направлению y до встречи с потенциалом описывается волновой функцией $\Phi_1(y)$, а продольное движение — волновым вектором $\vec{k}_1$. Отличными от нуля будут только функции $\Psi_1(x), \Psi_2(x) \ldots \Psi_N(x)$, которые удовлетворят уравнениям (5). Для нахождения решения системы уравнений (5) применим метод погружения [3,4]. Ищем их решения в виде

$$\Psi_m(x) = a_m(x) e^{ik_m x} - b_m(x) e^{-ik_m x}, \; m = 1, 2, \ldots N. \tag{7}$$

Выберем $a_m(x)$ и $b_m(x)$ так, чтобы

$$\frac{da_m}{dx} = \frac{db_m}{dx} e^{-2ik_m x}, \; m = 1, 2, \ldots N. \tag{8}$$

Тогда производная функции $\Psi_m(x)$ задается в виде

$$\frac{d\Psi_m}{dx} = ik_m [a_m e^{ik_m x} + b_m e^{-ik_m x}], \; m = 1, 2, \ldots N. \tag{9}$$

Такой выбор функции $a_m(x)$ и $b_m(x)$ означает, что независимо от вида потенциалов V_{mn} функции $\Psi_m(x)$ и $\frac{d\Psi_m}{dx}$ будут непрерывными функциями от x, если требовать, чтобы функции $\Psi_m(x)$ были непрерывны на заданных границах потенциалов V_{mn}. Таким образом, найденные из этого требования функции $a_m(x)$ и $b_m(x)$ обеспечивают непрерывность не только волновой функции, но и ее производной по направлению x на границах заданного потенциала.

Кроме уравнений (8) необходимо еще N уравнений для определения неизвестных функций $a_m(x)$ и $b_m(x)$. Эти уравнения получаются из уравнения Шредингера подстановкой в него (7) и (9)

$$\frac{da_m}{dx}e^{ik_m x}+\frac{db_m}{dx}e^{-ik_m x}=\sum_{n=1}^{N}\frac{V_{mn}}{ik_m}(a_n e^{ik_n x}-b_n e^{-ik_n x}),\ m=1,2,\dots N. \tag{10}$$

Как видно из системы уравнений (8) и (10), функции $a_m(x)$ и $b_m(x)$ становятся постоянными в областях, где потенциалы $V_{mn}(x)=0$. Согласно решениям (3) и (9) в этих областях функции $\Psi_m(x)$ имеют вид свободных волн, распространяющихся в направлении $\pm x$. Соответствующие постоянные a_m и b_m, естественно, должны быть связаны с амплитудами прохождения и отражения по этим каналам рассеяния.

3. Задача Коши для N-канального рассеяния. Введем функции

$$\tilde{D}_m(z)=a_m(z) \text{ и } D_m(z)=b_m(z),\ m=1,2, \tag{11}$$

от толщины потенциального слоя z. В уравнениях (8) и (10), заменяя x на z, а функции a_m и b_m согласно соотношениям (11) на $\tilde{D}_m(z)$ и $D_m(z)$, получим уравнения, определяющие неизвестные функции $\tilde{D}_m(z)$ и $D_m(z)$:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{D}_m(z)}{dz}&=\sum_{n=1}^{N}\frac{iV_{mn}}{2k_m}e^{-i(k_m-k_n)z}\tilde{D}_n(z)-\sum_{n=1}^{N}\frac{iV_{mn}}{2k_m}e^{-i(k_m+k_n)z}D_n(z),\ m=1,2,\dots N,\\ \frac{dD_m(z)}{dz}&=\sum_{n=1}^{N}\frac{iV_{mn}}{2k_m}e^{i(k_m+k_n)z}\tilde{D}_n(z)-\sum_{n=1}^{N}\frac{iV_{mn}}{2k_m}e^{i(k_m-k_n)z}D_n(z),\ m=1,2,\dots N.\end{aligned} \tag{12}$$

Искомые функции $\tilde{D}_m(z)$ и $D_m(z)$ определенным образом связаны с амплитудами рассеяния T_m и R_m, где T_m — амплитуда прохождения и R_m — амплитуда отражения для m-го канала рассеяния. При такой формулировке задачи рассеяния она сводится к задаче Коши, так как нахождение неизвестных функций $\tilde{D}_m(z)$ и $D_m(z)$ сводится к решению системы уравнений (12) с начальными условиями при $z=0$. Начальные условия для $\tilde{D}_m(z)$ и $D_m(z)$ при $z=0$ можно определить из связей этих функций с амплитудами рассеяния T_m и R_m и условий:

$$T_1(0)=1,\ T_2(0)=T_3(0)=\dots=T_N(0)=R_1(0)=R_2(0)=\dots=R_N(0)=0. \tag{13}$$

Таким образом, предложенная нами постановка задачи рассеяния является обобщением метода погружения [5,6] на случай N-канальной задачи рассеяния. Введем вместо $2N$ уравнений первого порядка (12) N уравнений второго порядка. Такое преобразование системы уравнений целесообразно, так как полученные уравнения внешне совпадают с уравнениями (5), которые фактически получаются из уравнений Шредингера в случае N-канального рассеяния. Введем обозначение

$$L_m(z)=\tilde{D}_m(z)e^{ik_m z}-D_m(z)e^{-ik_m z},\ m=1,2,\dots N. \tag{14}$$

Используя уравнения (12), можно получить следующую систему уравнений для функций $L_m(z)$:

$$\frac{d^2L_m(z)}{dz^2}+k_m^2L_m(z)-\sum_{n=1}^{N}V_{mn}L_n=0,\ m=1,2,\dots N. \tag{15}$$

Учитывая уравнения (8) и (11), первые производные функций $L_m(z)$ имеют следующий вид:

$$\frac{dL_m(z)}{dz}=ik_m[\tilde{D}_m(z)e^{ik_m z}+D_m(z)e^{-ik_m z}],\ m=1,2,\dots N. \tag{16}$$

Если ввести обозначения

$$Q_m(z)=\tilde{D}_m(z)e^{ik_m z}+D_m(z)e^{-ik_m z},\ m=1,2,\dots N, \tag{17}$$

то вместо уравнения (16) можно написать

$$\frac{dL_m(z)}{dz}=ik_mQ_m(z),\ m=1,2,\dots N. \tag{18}$$

Таким образом, сначала находим функции $L_m(z)$ и $Q_m(z)$ и далее согласно (14) и (17) восстанавливаем функции $\tilde{D}_m(z)$ и $D_m(z)$, $m=1,2\dots N$. А для нахождения $L_m(z)$ нужно решить систему уравнений (15) с заданными начальными условиями (13) и далее определить $Q_m(z)$ по формулам (18).

4. Связь между амплитудами рассеяния T_m и R_m и функциями $\tilde{D}_m$ и D_m. Рассмотрим систему уравнений (15). Умножим первое из них на $L_1^*(z)$, второе на $L_2^*(z)$, $\dots N$-е на $L_N^*(z)$ и сложим. Напишем также комплекс сопряженных уравнений (15), умножим их соответственно на функции $L_1(z), L_2(z),\dots L_N(z)$ и сложим. Разность этих двух уравнений даст

$$\sum_{m=1}^{N}\left(L_m^*\frac{d^2L_m}{dz^2}-L_m\frac{d^2L_m^*}{dz^2}\right)=0. \tag{19}$$

Интегрируя уравнение (19) и используя соотношения (18), получим

$$(L_1Q_1^*+L_1^*Q_1)+\sum_{m=2}^{N}\frac{k_m}{k_1}(L_m^*Q_m+Q_m^*L_m)=\text{const}. \tag{20}$$

Используя уравнения (14) и (17), можно из уравнения (20) исключить функции L_m и Q_m и вместо них ввести функции $\tilde{D}_m$ и D_m. Тогда получим

$$|D_1|^2-|\tilde{D}_1|^2+\sum_{m=2}^{N}\frac{k_m}{k_1}(|D_m|^2-|\tilde{D}_m|^2)=1. \tag{21}$$

Постоянную, входящую в уравнение (20), мы выбрали так, чтобы обеспечить удовлетворение начальных условий (13). Частица с волновым вектором $\vec{k}_1$ падает на потенциальный барьер и рассеивается с волновым вектором $\vec{k}_m$, $m = 1, 2, \ldots N$, амплитуды прохождения и отражения которых обозначим соответственно через T_m и R_m. Полную вероятность прохождения частицы $|T|^2$ запишем в следующем виде:

$$|T|^2 = \sum_{m=1}^{N} |T_m|^2. \tag{22}$$

Теперь перейдем к нахождению связей между амплитудами прохождения и отражения T_m и R_m и функциями $D_m(z)$ и $\tilde{D}_m(z)$. Эти связи должны быть такими, чтобы удовлетворялись следующие требования:

1. При отсутствии всех каналов рассеяния кроме первого $T_2 = T_3 = \ldots = T_N = R_2 = R_3 = \ldots = R_N = 0$, реализуется рассеяние, характерное для одномерной задачи рассеяния. Тогда $T_1 = T$ и отличные от нуля функции $\tilde{D}_1$ и D_1 связаны с T_1 и R_1 следующими формулами [6]:

$$D_1 = \frac{1}{T_1}, \ \tilde{D}_1 = \frac{R_1^*}{T_1^*}. \tag{23}$$

2. При отсутствии рассеяния по отдельным каналам должны выполняться условия $D_m = \tilde{D}_m = 0$ при $T_m = R_m = 0$ при $m = 1, 2, \ldots N$.

3. В общем случае, когда $T_1, T_2, \ldots T_N$ и $R_1, R_2, \ldots R_N$ отличны от нуля, условие (21) должно переходить в условие непрерывности для задачи N-канального рассеяния

$$\sum_{m=1}^{N} |T_m|^2 + \sum_{m=1}^{N} |R_m|^2 = 1. \tag{24}$$

С учетом вышеуказанных условий связи между амплитудами рассеяния $T_1, T_2, \ldots T_N, R_1, R_2, \ldots R_N$ с величинами $D_1, D_2, \ldots D_N, \tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \ldots \tilde{D}_N$ однозначно задаются в следующем виде:

$$D_m = \sqrt{\frac{k_1}{k_m}} \frac{1}{T_m} \left| \frac{T_m}{T} \right|^2, \ \tilde{D}_m = \sqrt{\frac{k_1}{k_m}} \frac{R_m^*}{T_m^*} \left| \frac{T_m}{T} \right|, \ m = 1, 2, \ldots N. \tag{25}$$

Эти формулы определяют амплитуды рассеяния T_m и R_m через искомые функции D_m и $\tilde{D}_m$ с точностью постоянного фазового множителя, который должен зависеть от координаты z_0 центра локального потенциала. Следовательно, амплитуды рассеяния можно искать в виде:

$$\begin{gathered} T_1 = \frac{D_1^*}{|D|^2}, \ R_1 = \frac{(\tilde{D}_1 D_1)^*}{|D_1||D|}, \\ T_m = \sqrt{\frac{k_m}{k_1}} \frac{D_1^*}{|D|^2} e^{i\varphi}, \ R_m = \sqrt{\frac{k_m}{k_1}} \frac{(\tilde{D}_m D_m)^*}{|D_m||D|} e^{i\tilde{\varphi}}, \ m = 2, 3, \ldots N, \end{gathered} \tag{26}$$

где

$$|D|^2 = |D_1|^2 + \sum_{m=2}^{N} \frac{k_m}{k_1} |D_m|^2. \tag{27}$$

Здесь T_1 и R_1 не имеют добавочного фазового множителя, так как при $T_m = R_m = 0$ $m = 2, 3, \ldots N$ они переходят в амплитуды одномерного рассеяния. В этом случае, как известно, T_1 не будет зависеть от z_0, а R_1 будет пропорционально $\exp(2ik_1 z_0)$: φ и $\bar{\varphi}$ должны быть выбраны так, чтобы зависящие от z_0 фазы перед T_m и R_m, $m = 2, 3, \ldots N$, равнялись $(k_1 - k_m)z_0$ и $(k_1 + k_m)z_0$ соответственно. Интересно отметить, что добавочная фаза произведения $R_m \cdot T_m$ не зависит от канала рассеяния и равняется $2k_1 z_0$.

В заключение отметим, что для нахождения амплитуд рассеяния по N каналам вначале нужно интегрировать систему уравнений (15) и найти функции $L_1(z), L_2(z), \ldots L_N(z)$. Постоянные интегрирования определяются из начальных условий (13), которые совместно с уравнениями (14), (17), (18) и (25) определяют $L_m(z)$ и $\dfrac{dL_m(z)}{dz}$ для $m = 1, 2, \ldots N$ в точке $z = 0$. Зная значение функции $L_m(z)$ при $z = d$, где z − координата конца потенциала, из уравнений (18) можно определить $Q_m(d)$ и далее, используя (14) и (17), определить $D_m(d)$ и $\bar{D}_m(d)$. Наконец, формулы (26) определяют амплитуды прохождения T_m и отражения R_m через найденные значения функций $D_m(d)$ и $\bar{D}_m(d)$.

Российско-Армянский (Славянский) государственный университет

Л. Р. Седракян

Метод погружения для задачи N-канального рассеяния

Предложен и применен метод погружения для решения задачи многоканального рассеяния. В частности, рассмотрено рассеяние частицы на заданном потенциале, когда в поперечном направлении рассеивающаяся частица совершает финитное движение. При такой постановке задачи рассеяние становится многоканальным, что связано с наличием дискретных состояний поперечного движения частицы. Для случая N-канального рассеяния постановка задачи доведена до конца. Предложен метод определения амплитуд рассеяния при заданном виде потенциала рассеяния $V = V(x, y)$.

Լ. Ռ. Սեդրակյան

Ընկղմման մեթոդը բազմուղի ցրման խնդրի համար

Առաջարկված է նոր մեթոդ բազմականալ ցրման խնդրի լուծման համար: Մասնավորապես դիտարկված է այնպիսի ցրում, որի դեպքում մասնիկը լայնական ցրման ուղղությամբ կատարում է վերջավոր շարժում: Այս դեպքում ցրումը բազմուղի է, ինչը պայմանավորված է մասնիկի լայնական շարժման դիսկրետ վիճակներով: Բազմուղի ցրման դեպքում խնդրի դրվածքը հասցված է մինչեւ վերջ: Առաջարկված է մեթոդ ցրման ամպլիտուդների որոշման համար:

L. R. Sedrakian

Immersing Method for Multichannel Scattering Problem

We propose a method for solution of the multichannel scattering problem. In particular, scattering problem is considered for the case when in the cross-section direction a scattering particle makes a finite motion. In this case scattering becomes multichannel, which is connected with the presence of discrete energetic levels of the cross-section movement of the particle. For the case of N-channel scattering, the problem is formulated up to the end. We propose a method for determination of scattering amplitudes for the potential $V = V(x, y)$.

Литература

1. *Boese D., Lischka M., Reichl L.E.* - Phys. Rev. B. 2000. V. 82. P. 16933.

2. *Седракян Д.М., Казарян Э.М., Седракян Л.Р.* - Изв. НАН Армении. Физика. 2009. Т. 44. N6. С. 395-404.

3. *Бабиков В.В.* Метод фазовых функций в квантовой механике. М. Наука. 1976.

4. *Седракян Д.М., Хачатрян А.Ж.* - Изв. НАН Армении. Физика. 1999. Т. 34. N3. С. 138-144.

5. *Седракян Д.М., Хачатрян А.Ж., Казарян Э.М., Седракян Л.Р.* - Изв. НАН Армении. Физика. 2009. Т. 44. N3. С. 167-175.

6. *Хачатрян А.Ж., Седракян Д.М., Хоецян В.А.* - Изв. НАН Армении. Физика. 2009. Т. 44. N2. С. 133-143.