ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 109 2009 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

Р. А. Багиян

Об оценке последовательных производных целой функции конечного роста

(Представлено академиком В. С. Захаряном 6/IV 2009)

Ключевые слова: *функция типа Миттаг-Леффлера, обобщённое неравенство С. Н. Бернштейна, целые функции произвольного роста*

Как известно [1], целая функция типа Миттаг-Леффлера определяется посредством разложения

$$E_\rho(z,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+\frac{k}{\rho})}\qquad(\rho>0,-\infty<\mu<+\infty).$$

В [2] получены следующие неравенства для поледовательных производных этой функции:

$$|E_\rho^{(n)}(-z,\mu)|\le\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu+\frac{n}{\rho})},\qquad \operatorname{Re}z\ge0,\qquad n=0,1,2,\dots,$$

которые достижимы в точке $z=0$.

Целью данной работы является получение аналогичных неравенств для произвольной целой функции конечного роста.

В [3] автором установлено следующее интегральное представление для любой целой функции $F(z)$ роста (ρ,σ) $(1<\rho<+\infty,\ 0<\sigma<+\infty)$ во всей комплексной плоскости:

$$F(z)=\int_0^{+\infty}f(zt)\Phi_{\rho,\mu}(t)dt\quad(-\infty<\mu<+\infty),\tag{1}$$

где $f(z)$ — целая функция порядка 1 и типа $\sigma^{1/\rho}$, а $\Phi_{\rho,\mu}(t)$ — подробно исследованная в [2] функция.

В [3] введён класс B^{ρ}_{σ} — целых функций роста (ρ, σ)

$$(1 \le \rho < 2, \ 0 < \sigma < +\infty),$$

ограниченных в объединении угловых областей

$$\left\{\varphi, |\varphi| \le \frac{\pi}{2\beta}\right\} \cup \left\{\varphi, |\varphi - \pi| \le \frac{\pi}{2\beta}\right\}, \ \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\rho} = 1.$$

Установлна теорема, согласно которой если $F(z) \in B^{\rho}_{\sigma}$, то фигурирующая в (1) функция $f(z)$ принадлежит бернштейновскому классу $B_{\sigma^{1/\rho}}$. Класс Бернштейна $B_{\sigma^{1/\rho}}$ — это класс целых функций экспоненциального типа, ограниченных на действительной оси. Более того, было установлено, что функция $f(z)$ принадлежит более узкому классу $W^{2}_{\sigma^{1/\rho}}$, т.е. классу функций экспоненциального типа, суммируемых с квадратом на действительной оси. Из представления (1) имеем

$$F^{(n)}(z) = \int\limits_{0}^{\infty} f^{(n)}(zt) t^{n} \Phi_{\rho,\mu}(t) dt$$

и при $z = x$, $-\infty < x < +\infty$,

$$F^{(n)}(x) = \int\limits_{0}^{\infty} f^{(n)}(xt) t^{n} \Phi_{\rho,\mu}(t) dt.$$

Отсюда с исользованием классических неравенств С.Н. Бернштейна и теоремы 5 из [3] получим

$$\|F^{(n)}(x)\|_{\infty} \le \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu + \frac{n}{\rho})} \|f^{(n)}(x)\|_{\infty} \le \sigma^{\frac{n}{\rho}} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu + \frac{n}{\rho})} \|f(x)\|_{\infty}, \tag{2}$$

где $\|f(x)\|_{\infty}$ sup-норма.

Но известно [4] следующее неравенство:

$$\max \big| f(x) = \|f(x)\|\big|_{\infty} \le \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{2}, \tag{3}$$

где $\|f(x)\|_{2} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^{2} dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Далее в интегральном представлении (1), которое верно для любого z, положим в частности

$$z = exp\left(\pm i \frac{\pi}{2\lambda}\right) y, \quad y \in (0, +\infty), \quad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\rho} = 1,$$

$$F(e^{\pm i\frac{\pi}{2\lambda}}y) = \int\limits_0^\infty f(e^{\pm i\frac{\pi}{2\lambda}}yt)\Phi_{\rho,\mu}(t)dt.$$

После очевидной замены $u = e^{i\frac{\pi}{2\lambda}}yt$ получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g^{(\pm)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{e^{\pm i\frac{\pi}{2\lambda}}y}F\left(\frac{1}{e^{\pm i\frac{\pi}{2\lambda}}y}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(u)\Phi_{\rho,\mu}(e^{\pm i\frac{\pi}{2\lambda}}yu)du. \tag{4}$$

Интегральное представление (4) рассмотрено в [6], где введена функция

$$K(s,\theta) = e^{-i\theta s}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\mu + \frac{s-1}{\rho})},\ \rho > 1,\ |\theta| \le \frac{\pi}{2\lambda},\ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\rho} = 1,$$

и установлено, что функция $\dfrac{K(s,\theta)}{1-s}$ двойственна по Меллину с функцией

$$\frac{1}{x}\int\limits_0^x \Phi_{\rho,\mu}(te^{i\theta})dt, \quad |\theta| \le \frac{\pi}{2\lambda}.$$

При $\theta = 0$ получим функцию $K(s)$, рассмотренную автором в [5] в связи с обращением интегрального представления (1) с привлечением операторов бесконечного порядка; установлен также аналогичный результат о двойственности по Меллину.

В [6] получена формула обращения для интегрального представления (4), а также некоторые неравенства. Используя эти неравенства для значений параметров

$$\rho > 1,\ \mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho},\ \frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\rho},$$

будем иметь

$$\int\limits_0^{+\infty} |g^{\pm}(x)|^2dx \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} |f(y)|^2dy$$

и

$$\int\limits_x^{+\infty} |f(y)|^2dy \le 4\pi\left\{\int\limits_0^{+\infty} |g^{(+)}(x)|^2dx + \int\limits_0^{+\infty} |g^{(-)}(x)|^2\right\}.$$

Таким образом, получим, что

$$\int\limits_0^\infty |f(x)|^2dx = \|f\|_2^2 \le 2\left\{\int\limits_0^\infty \left|\frac{e^{-i\frac{\pi}{2\lambda}}}{y}F\left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{2\lambda}}}{y}\right)\right|^2dy + \int\limits_0^\infty \left|\frac{e^{i\frac{\pi}{2\lambda}}}{y}F\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2\lambda}}}{y}\right)\right|^2dy\right\}$$

или

$$\|f(x)\|_2 \le \sqrt{2}\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{1}{y}F\left(\frac{1}{y}e^{-i\frac{\pi}{2\lambda}}\right)\right|^2dy\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{1}{y}F\left(\frac{1}{y}e^{i\frac{\pi}{2\lambda}}\right)\right|^2dy\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Если в интегралах правой части сделать замену $\frac{1}{y} = z$, то после очевидных сокращений получим

$$\|f(x)\|_2 \leq \sqrt{2}\left\{\left[\int_0^{+\infty}\left|F(ze^{-i\frac{\pi}{2\lambda}})\right|^2 dz\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_0^{+\infty}\left|F(ze^{i\frac{\pi}{2\lambda}})\right|^2 dz\right]^{\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$= \sqrt{2}\left[\left\|F(xe^{-i\frac{\pi}{2\lambda}})\right\|_2 + \left\|F(xe^{i\frac{\pi}{2\lambda}})\right\|_2\right].$$

Подставляя эти оценки в неравенства (2), (3), окончательно получим

$$\|F^{(n)}(x)\|_\infty \leq \sigma^{\frac{n}{\rho}}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu+\frac{n}{\rho})}\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}\|f(x)\|_2 \leq$$
$$\leq \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}}\sigma^{\frac{n}{\rho}}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu+\frac{n}{\rho})}\left[\left\|F(xe^{-i\frac{\pi}{2\lambda}})\right\|_2 + \left\|F(xe^{i\frac{\pi}{2\lambda}})\right\|_2\right]. \quad (5)$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Если $F(z) \in B_\sigma^\rho$ $(1 < \rho < 2,\ 0 < \sigma < +\infty)$, то при $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$, $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\rho} = 1$ имеют место неравенства (5) для последовательных производных целой функции конечного роста.*

Доказанная теорема позволяет оценить последовательные производные целой функции конечного роста со значениями норм этой функции в классе $L_2(0,+\infty)$ на лучах $x\exp(\pm i\frac{\pi}{2\lambda})$.

Государственный инженерный университет Армении

Р. А. Багиян

Об оценке последовательных производных целой функции конечного роста

Для последовательных производных функций типа Миттаг-Леффлера автором и М.М.Джрбашяном получены точные неравенства. В данной работе обобщается этот результат, а именно доказывается следующая

Теорема. *Если $F(z) \in B_\sigma^\rho$ $(1 < \rho < 2,\ 0 < \sigma < +\infty)$, то для значений параметров $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$, $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\rho} = 1$ имеют место следующие неравенства:*

$$\|F^{(n)}(x)\|_\infty \leq \sigma^{\frac{n}{\rho}}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu+\frac{n}{\rho})}\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}\|f(x)\|_2 \leq$$
$$\leq \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}}\sigma^{\frac{n}{\rho}}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu+\frac{n}{\rho})}\left[\left\|F(xe^{-i\frac{\pi}{2\lambda}})\right\|_2 + \left\|F(xe^{i\frac{\pi}{2\lambda}})\right\|_2\right].$$

Ր. Ա. Բաղիյան

Վերջավոր աճով ամբողջ ֆունկցիայի հաջորդական ածանցյալների գնահատման մասին

Հեղինակի եւ Մ.Մ. Ջրբաշյանի կողմից Միտտագ-Լեֆլերի ամբողջ ֆունկցիայի հաջորդական ածանցյալների համար ստացվել էին ճշգրիտ անհավասարություններ: Աշխատանքում ընդհանրացվում է այդ արդյունքը կամայական ամբողջ ֆունկցիայի համար, այսինքն ապացուցվում է հետեւյալը

Թեորեմ. *Եթե* $F(z) \in B_\sigma^\rho$ $(1 < \rho < 2,\ 0 < \sigma < +\infty)$, *ապա* $\mu = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\rho}$, $\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\rho} = 1$ *արժեքների համար տեղի ունեն հետեւյալ անհավասարությունները*

$$\|F^{(n)}(x)\|_\infty \le \sigma^{\frac{n}{\rho}} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu+\frac{n}{\rho})} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \|f(x)\|_2 \le$$

$$\le \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}} \sigma^{\frac{n}{\rho}} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu+\frac{n}{\rho})} \left[\left\|F(xe^{-i\frac{\pi}{2\lambda}})\right\|_2 + \left\|F(xe^{i\frac{\pi}{2\lambda}})\right\|_2 \right].$$

R. A. Baghiyan

On Estimates of Successive Derivatives of any Entire Function of Finite Grouth

The following inequalities for successive derivatives of Mittag-Leffler type function were obtained by the author and M.M.Djrbashian. The result is generalised in this paper. It is prooved the following

Theorem. *Let* $F(z) \in B_\sigma^\rho$ $(1 < \rho < 2,\ 0 < \sigma < +\infty)$, *then for* $\mu = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\rho}$, $\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\rho} = 1$ *take plase the following estimates*

$$\|F^{(n)}(x)\|_\infty \le \sigma^{\frac{n}{\rho}} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu+\frac{n}{\rho})} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \|f(x)\|_2 \le$$

$$\le \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}} \sigma^{\frac{n}{\rho}} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu+\frac{n}{\rho})} \left[\left\|F(xe^{-i\frac{\pi}{2\lambda}})\right\|_2 + \left\|F(xe^{i\frac{\pi}{2\lambda}})\right\|_2 \right].$$

Литература

1. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966.

2. *Джрбашян М.М., Багиян Р.А.* - ДАН СССР. 1975. Т. 223. N 6; Изв. АН АрмССР. Математика. 1975. Т. 10. N 6.

3. *Багиян Р.А.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1980. Т. 15. N3.

4. *Ибрагимов И.И.* Экстремальные свойства целых функций конечной степени. Баку. Изд-во АН АзССР. 1962. 316 с.

5. *Багиян Р.А.* - ДАН АрмССР. 1981. Т. 73. N4.

6. *Акопян С.А.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2004. Т. 39. N6.