УДК 517.98

Г. А. Саргсян

**О собственных функциях дифференциальных операторных пучков,
порожденных третьей краевой задачей**

(Представлено академиком В. С. Захаряном 16/III 2009)

Ключевые слова: полнота, квадратичный пучок, собственная функция, спектральный параметр

Исследование некоторых задач математической физики сводится к изучению спектральных свойств квадратичного операторного пучка

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C, \quad (0.1)$$

где B и C – самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H .

Пучки вида (0.1) возникают, например, в задаче о движении вязкой жидкости, в задаче о колебаниях электромагнитных и акустических волноводов.

Для этого пучка ставится вопрос о двукратной полноте системы собственных и присоединенных элементов, впервые введенной и изученной М. В. Келдышем [1].

В пространстве H рассмотрим матричный оператор

$$P = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{pmatrix}, \quad (0.2)$$

который порождается квадратичным операторным пучком (0.1) при его линеаризации. М. Г. Крейном и Г. К. Лангером [2] установлена тесная спектральная связь квадратичного операторного пучка (0.1) и ассоциированного с ним оператора (случай, когда оператор B – самосопряженный, C – положительно определенный компактный оператор). В частности показано,

что собственные значения пучка (0.1) и оператора (0.2) совпадают с их собственными и алгебраическими кратностями и что, если у оператора Π в гильбертовом пространстве H имеется полная система корневых векторов, то у операторного пучка (0.1) имеется двукратно полная система собственных и присоединенных элементов (С.П.Э.), и наоборот. Так что полноту системы корневых векторов оператора можно брать как новое определение двукратной полноты С.П.Э. квадратичного операторного пучка (0.1), которое эквивалентно первоначальному определению М. В. Келдыша [1].

Е. [3-11] изучены спектральные свойства как линейных, так и полиномиальных операторных пучков, порожденных смешанными задачами, не разрешенными относительно старшей производной по времени.

Е. настоящей работе рассматривается спектральная взаимосвязь операторов, порожденных третьей краевой задачей и краевой задачей Дирихле, для квадратичных дифференциальных операторных пучков.

Пусть Ω — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\delta\Omega$. Рассмотрим следующую однородную краевую задачу на собственные значения:

$$K_\lambda(u) = Mu + \lambda Nu + \lambda^2 Lu = 0, \quad (1)$$

$$Gu = \gamma u + \omega x \frac{\partial u}{\partial x} + \omega y \frac{\partial u}{\partial y} |_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

где M , N и L — однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами второго порядка

$$Mu = c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3)$$

$$Nu = b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4)$$

$$Lu = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (5)$$

Относительно оператора L предполагается, что он является эллиптическим. В связи с исследованием вышеставленных задач мы будем одновременно рассматривать и задачи Дирихле на собственные значения для тех же дифференциальных пучков:

$$Mu + \lambda Nu + \lambda^2 Lu = 0, \quad (6)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (7)$$

Определение. Отличная от тождественного нуля функция $u_\lambda(x, y) \in W_2^2(\Omega)$ называется обобщенной собственной функцией задачи (1) - (6), (7), соответствующей собственному значению λ , если она удовлетворяет уравнению (1) в обобщенном смысле и $Gu_\lambda \in W_2^0(\Omega)$, $W_2^i(\Omega)$ ($i = 1, 2$) — пространства С. Л. Соболева. $W_2^0(\Omega)$ — множество функций из $W_2^1(\Omega)$, исчезающих на границе $\partial\Omega$ -области в смысле теорем вложения С. Л. Соболева.

Для исследования некоторых общих свойств граничного оператора $Gu = \gamma(x, y)u + \alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}$, с помощью предельного перехода получим формулу Грина.

Пусть Ω — ограниченная область двумерного пространства x, y с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Относительно $\gamma(x, y), \alpha(x, y), \beta(x, y)$ предполагается, что они достаточно гладкие функции в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — непрерывно дифференцируемые функции в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Легко проверить, что имеют место тождества

$$\alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}v = v\frac{\partial}{\partial x}(\alpha u) - \frac{\partial \alpha}{\partial x}uv = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha v u) - u\frac{\partial}{\partial x}(\alpha v), \quad (8)$$

$$\beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}v = v\frac{\partial}{\partial y}(\beta u) - \frac{\partial \beta}{\partial y}uv = \frac{\partial}{\partial y}(\beta v u) - u\frac{\partial}{\partial y}(\beta v), \quad (9)$$

Суммируя тождества (8), (9) и интегрируя по области, перейдя от двойного интеграла к интегралу по границе, согласно известной формуле Грина получим

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} v \left\{ \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dx dy &= \int_{\partial\Omega} uv \{ \alpha dy - \beta dx \} - \\ &- \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right\} uv dx dy - \iint_{\Omega} u \left\{ \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, для произвольных функций u и v из $C^1(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left\{ \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right\} v dx dy &= \int_{\partial\Omega} uv \{ \alpha \cos(s, \vec{y}) - \beta \cos(s, \vec{x}) \} ds - \\ &- \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) uv dx dy - \iint_{\Omega} u \left\{ \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (11)$$

С помощью предельного перехода окончательно получаем формулу Грина для граничного оператора G

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} Guv dx dy &= \int_{\partial\Omega} uv (\alpha \cos(s, \vec{y}) - \beta \cos(s, \vec{x})) ds - \iint_{\Omega} uGv dx dy + \\ &+ \iint_{\Omega} \left(2\gamma - \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) uv dx dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Формула (12) справедлива для произвольных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ из соболевского пространства $W_2^1(\Omega)$. Для функций $u, v \in W_2^1(\Omega)$ она принимает вид

$$\iint_{\Omega} Guv dx dy = \iint_{\Omega} \left(2\gamma - \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) uv dx dy - \iint_{\Omega} uGv dx dy. \quad (12')$$

В частном случае, когда $\alpha(x, y) = \omega x$, $\beta(x, y) = \varpi y$, делая замену переменных $x = r(\alpha) \cos \alpha$, $y = r(\alpha) \sin(\alpha)$ ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) в (10), формулу Грина (13) приведем к виду

$$\iint_{\Omega} Guv dx dy = \varpi \int_0^{2\pi} uv r^2(\alpha) d\alpha + 2 \iint_{\Omega} (\gamma - \omega) uv dx dy - \iint_{\Omega} uGv dx dy. \quad (13)$$

Производные, входящие в формулы (11), понимаются как обобщенные производные в пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Из формулы Грина (11) легко усмотреть некоторые общие свойства для граничного оператора G , отображающего соболевское пространство $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Лемма 1. При выполнении условий

$$\sigma = \min_{\max_{(x,y) \in \bar{\Omega}}} \left[2\gamma(x, y) - \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right] \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0, \quad (14)$$

$$\alpha(x, y) \cos(s, \hat{y}) - \beta \cos(s, \hat{x}) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega$$

оператор G является положительно определенным (отрицательно определенным) оператором, отображающим W_2^1 в $L_2(\Omega)$.

Лемма 2. При

$$2\gamma(x, y) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega} \quad (15)$$

оператор G является антисимметричным оператором, отображающим $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Справедливость этих утверждений вытекает из следующих соотношений:

$$(Gu, u)_{L_2(\Omega)} \geq \frac{\delta}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in W_2^1(\Omega), \quad (16)$$

$$(Gu, v)_{L_2(\Omega)} = -(u, Gv)_{L_2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in W_2^1(\Omega), \quad (17)$$

которые являются непосредственными следствиями формул Грина (12), (12') при условиях (14), (15). Области значений оператора G , действующего,

соответственно, на пространствах $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$, обозначим через $R_*(\Omega) = GW_2^1(\Omega)$ и $R_*(\Omega) = GW_2^1(\Omega)$. Очевидно включение $R_*(\Omega) \subset R_*(\Omega) \subseteq L_2(\Omega)$.

При выполнении условий (14) оператор G имеет обратный G^{-1} , отображающий область значений $R_*(\Omega)$ оператора G на функциональное пространство $W_2^1(\Omega)$.

Обозначим через $h_*(\Omega)$ ($h_*(\Omega)$) множество тех функций $u(x, y) \in W_2^1(\Omega)$ ($W_2^1(\Omega)$), для которых $Gu \in W_2^1(\Omega)$.

Лемма 3. При выполнении следующих условий:

$$\alpha(x, y) = \alpha(x), \quad \beta(x, y) = \beta(y), \quad \gamma(x, y) = \gamma = \text{const}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} \geq 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} \geq 0,$$

$$\delta = \min_{(x, y) \in \Omega} \left[2\gamma - \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right] > 0, \quad (18)$$

$$\alpha(x) \cos(s, \hat{y}) - \beta(y) \cos(s, \hat{x}) \geq 0$$

имеет место неравенство

$$(Gu, u)_{W_2^1(\Omega)} \geq \frac{\delta}{2} \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in h_*(\Omega) \cap W_2^2(\Omega). \quad (19)$$

Доказательство. Действительно, для произвольной функции $u(x, y) \in h_*(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$ и в силу леммы 2 имеем:

$$\begin{aligned} (Gu, u)_{W_2^1(\Omega)} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} Gu, \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\partial}{\partial y} Gu, \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{L_2(\Omega)} = \\ &= \left(G \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{L_2(\Omega)} + \left(G \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{L_2(\Omega)} \geq \\ &\geq \frac{\delta}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 = \frac{\delta}{2} \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что оператор G^{-1} , обратный к оператору G , отображающий $W_2^1(\Omega) \cap GW_2^1(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$, является ограниченным в метрике пространства $W_2^1(\Omega)$.

Будем предполагать, что

$$\alpha(x, y) = wx, \quad \beta(x, y) = wy, \quad \gamma(x, y) = \gamma, \quad (20)$$

где w и γ — действительные постоянные такие, что

$$\gamma > w \geq 0 \quad \text{или} \quad \gamma < w \leq 0. \quad (21)$$

Лемма 4. Для произвольной гладкой функции $u(x, y)$ имеет место следующее соотношение:

$$MGu = (G + 2wI)Mu. \quad (22)$$

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ имеет частные производные до третьего порядка. Тогда имеем

$$\frac{\partial^2 Gu}{\partial x^2} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + wx \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + wy \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 Gu}{\partial x \partial y} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2w \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + wx \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + wy \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 Gu}{\partial y^2} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2w \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + wx \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + wy \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}. \quad (25)$$

Умножая равенства (23), (24), (25), соответственно, на c_1, c_2, c_3 и суммируя, получим

$$MGu = \gamma Mu + 2wMu + wx \frac{\partial Mu}{\partial x} + wy \frac{\partial Mu}{\partial y} = GMu + 2wMu.$$

Лемма доказана.

Задача Дирихле (6), (7) в операторной форме эквивалентна изучению следующего квадратичного операторного пучка:

$$L(\lambda)u = Cu + \lambda Bu + \lambda^2 Iu, \quad (26)$$

где $B = -L^{-1}N, C = -L^{-1}M$ — самосопряженные ограниченные операторы С. Л. Соболева, действующие в соболевском пространстве $W_2^1(\Omega)$, I — единичный оператор.

Предполагается, что области значений операторов B и C принадлежат $R_*(\Omega)$. Пучок $L(\lambda)$ при линеаризации, в свою очередь, порождает матричный оператор

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C & B \end{pmatrix}, \quad (27)$$

действующий в ортогональной сумме гильбертовых пространств $H(\Omega) = W_2^1(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega)$. Полнота системы собственных векторов матричного оператора $\hat{A}$ в H означает двукратную полноту системы собственных элементов для квадратичного пучка $L(\lambda)$ и, следовательно, для краевой задачи (6), (7).

Рассмотрим квадратичный операторный пучок

$$L_*(\lambda) = C_* + \lambda B_* - \lambda^2 I, \quad (28)$$

где C_* и B_* — линейные операторы, действующие в пространстве $h_*(\Omega)$ согласно формулам

$$C_*u = G^{-1}CGu, \quad B_*u = G^{-1}BGu, \quad u \in h_*(\Omega) \quad (29)$$

I — единичный оператор в $h_*(\Omega)$. Ассоциированный с этим пучком матричный оператор

$$\hat{A}_* = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C_* & B_* \end{pmatrix} \quad (30)$$

действует в ортогональной сумме пространств $\hat{H}(\Omega) = h_*(\Omega) \oplus h_*(\Omega)$. Оператор $\hat{A}_*$ можно представить в виде

$$\hat{A}_* = \hat{G}^{-1}\hat{A}\hat{G}, \quad (31)$$

где матричный оператор

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \quad (32)$$

отображает $W_2^1(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega)$, а его обратный

$$\hat{G}^{-1} = \begin{pmatrix} G^{-1} & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{pmatrix} \quad (33)$$

отображает $R_*(\Omega) \oplus R_*(\Omega)$ на $W_2^1(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega)$.

Теорема 1. *Гладкие собственные функции краевой задачи (1), (2) являются собственными элементами для квадратичного пучка $L_*(\lambda)$ и наоборот.*

Доказательство. Пусть $u_\lambda(x, y)$ — гладкая собственная функция краевой задачи (1), (2) с собственным значением λ . Тогда в силу леммы 4 имеем

$$K(\lambda)Gu_\lambda = (G + 2\omega I)K(\lambda)u_\lambda = 0. \quad (34)$$

Отсюда в силу существования обратных операторов L^{-1} и G^{-1} заключаем

$$L_*u_\lambda = G^{-1}L^{-1}K(\lambda)Gu_\lambda = 0, \quad u_\lambda(x, y) \in h_*(\Omega). \quad (35)$$

Собратно, пусть $u_\lambda(x, y) \in h_*(\Omega)$ — гладкий собственный элемент квадратичного пучка $L_*(\lambda)$, соответствующий собственному значению λ , тогда, применяя последовательно операторы G и L , из равенства

$$L_*(\lambda)u_\lambda = G^{-1}CGu_\lambda + \lambda G^{-1}BGu_\lambda - \lambda^2 u_\lambda = 0 \quad (36)$$

получаем

$$K(\lambda)Gu_\lambda(x, y) = 0. \quad (37)$$

Отсюда в силу леммы 4

$$(G + 2\varpi I)K(\lambda)u_\lambda(x, y) = 0. \quad (38)$$

Но поскольку существует обратный оператор $(G + 2\varpi I)^{-1}$, то окончательно имеем

$$K(\lambda)u_\lambda(x, y) = 0, \quad Gu_\lambda(x, y) \in W_2^1(\Omega).$$

Теорема доказана.

Вышедоказанная теорема показывает, что краевые задачи (1), (2) вполне характеризуются квадратичным операторным пучком $L_*(\lambda)$, который по построению подобен квадратичному пучку $L(\lambda)$, порожденному (6), (7).

Теорема 2. Пусть $\gamma > \omega \geq 0$ ($\gamma \leq \omega \leq 0$), тогда через двукратно полную в $W_2^1(\Omega)$ систему собственных функций из $W_2^1(\Omega) \cap R_*(\Omega)$ квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ можно построить двукратно полную систему собственных функций для квадратичного пучка $L_*(\lambda)$ в $h_*(\Omega)$ и обратно, через двукратно полную в метрике $W_2^2(\Omega)$ систему собственных функций пучка $L_*(\lambda)$ в $h_*(\Omega)$ можно построить двукратно полную систему собственных функций пучка $L(\lambda)$ в $W_2^1(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $u_{\lambda_n}(x, y)$ — собственная функция для пучка $L(\lambda)$, тогда

$$GL_*(\lambda_n)G^{-1}u_{\lambda_n} = L(\lambda_n)u_{\lambda_n} = 0, \quad (39)$$

т.е. $\nu_{\lambda_n}(x, y) = G^{-1}u_{\lambda_n}(x, y) \in h_*(\Omega)$ является собственной функцией для пучка $L_*(\lambda)$. Двукратная полнота системы $\{u_{\lambda_n}(x, y)\}_{n=1}^\infty$ в $W_2^1(\Omega)$ означает полноту системы вектор-функции $\left\{ \tilde{u}_{\lambda_n} = \begin{pmatrix} u_{\lambda_n} \\ \lambda_n u_{\lambda_n} \end{pmatrix} \right\}_{n=1}^\infty$ матричного оператора $\hat{A}$ в

$$\hat{H}(\Omega) = W_2^1(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega).$$

Покажем, что вектор-функция

$$\hat{\nu}_{\lambda_n}(x, y) = \begin{pmatrix} \nu_{\lambda_n} \\ \lambda_n \nu_{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{-1}u_{\lambda_n} \\ \lambda_n G^{-1}u_{\lambda_n} \end{pmatrix} = \hat{G}^{-1}\tilde{u}_{\lambda_n} \quad (40)$$

является собственным вектором для оператора $\hat{A}_*$.

На самом деле, имеем

$$\hat{A}_*\hat{\nu}_{\lambda_n} = \hat{G}^{-1}\hat{A}\hat{G}\hat{\nu}_{\lambda_n} = \hat{G}^{-1}\hat{A}\tilde{u}_{\lambda_n} = \lambda_n\hat{\nu}_{\lambda_n}. \quad (41)$$

Пусть $\hat{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$ — произвольный вектор из $\hat{H}_*(\Omega) = h_*(\Omega) \oplus h_*(\Omega)$.

Рассмотрим вектор

$$\hat{G}\hat{\nu} = \hat{w} \in H(\Omega). \quad (42)$$

Существует последовательность линейных комбинаций из собственных вектор-функций оператора $\hat{A}$, так что

$$\sum_{k=1}^N d_k^{(N)} u_{\lambda_k} \xrightarrow{\hat{H}(\Omega)} \hat{w} \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (43)$$

Отсюда в силу непрерывности оператора $\hat{G}^{-1}$

$$\sum_{k=1}^N d_k^{(N)} \hat{G}^{-1} u_{\lambda_k} = \sum_{k=1}^N d_k^{(N)} \hat{v}_{\lambda_k} \xrightarrow{\hat{H}_*(\Omega)} \hat{G}^{-1} \hat{w} = \hat{v}. \quad (44)$$

Таким образом, для матричного оператора $\hat{A}_*$ система $\{v_{\lambda_k} = \hat{G}^{-1} u_{\lambda_k}\}_1^\infty$ собственных вектор-функций полна в ортогональной сумме $\hat{H}(\Omega) = h_*(\Omega) \oplus h_*(\Omega)$. А это означает, что система собственных функций квадратичного пучка $L_*(\Omega)$ двукратно полна в $h_*(\Omega)$. Обратно, пусть система собственных функций $\{v_{\lambda_k}(x, y)\}_{k=1}^\infty$ пучка $L_*(\lambda)$ двукратно полна в $h_*(\Omega)$ в метрике $W_2^2(\Omega)$. А это означает полноту в метрике $W_2^2(\Omega) \oplus W_2^2(\Omega)$ системы собственных векторов $\left\{ \hat{v}_{\lambda_k} = \begin{pmatrix} v_{\lambda_k} \\ \lambda_k v_{\lambda_k} \end{pmatrix} \right\}_1^\infty$ матричного оператора $\hat{A}_*$ в $\hat{H}_*(\Omega)$.

Пусть $\hat{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ — произвольный элемент из $\hat{H}(\Omega)$, тогда вектор $\hat{v} = \hat{G}^{-1} \hat{u} = \begin{pmatrix} G^{-1} u_1 \\ G^{-1} u_2 \end{pmatrix} \in H_*(\Omega)$ и поэтому может быть аппроксимирован линейной комбинацией собственных векторов оператора $\hat{A}_*$

$$\sum_{k=1}^N l_k^{(N)} \hat{v}_{\lambda_k} \xrightarrow{W_2^2(\Omega) \oplus W_2^2(\Omega)} \hat{v} \text{ при } N \rightarrow \infty \quad (45)$$

В силу непрерывности оператора $\hat{G}$ имеем

$$\sum_{k=1}^N l_k^{(N)} \hat{G} \hat{v}_{\lambda_k} \xrightarrow{W_2^1(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega)} \hat{G} \hat{v} = \hat{u} \text{ при } N \rightarrow \infty \quad (46)$$

Легко увидеть, что система $\hat{G} \hat{v}_{\lambda_k} \in \hat{H}(\Omega)$ является системой собственных векторов для оператора $\hat{A}$. Теорема доказана.

Предположим, что дифференциальные операторы M и L удовлетворяют следующим условиям:

$$\iint_{\Omega} M p p d\Omega > 0, \quad \iint_{\Omega} L p p d\Omega < 0 \quad (*)$$

для всех отличных от нуля полиномов от x и y . В работе [5] при выполнении условия (*) для квадратичного пучка $L(\lambda)$ установлено существование двукратно полной системы полиномиальных собственных функций в $W_2^1(\Omega)$ в случае, когда область Ω — единичный круг. Сопоставление этого результата с вышедоказанной теоремой позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Если область Ω – круг, при выполнении условий (*) и $\gamma > \omega \geq 0$ ($\gamma < \omega \leq 0$) у квадратичного операторного пучка $L_*(\lambda)$, порожденного краевой задачей, имеется двукратная полная система полиномиальных собственных функций в $h_*(\Omega)$

Военный авиационный институт им. маршала А. Ханферянца

Г. А. Саргсян

О собственных функциях дифференциальных операторных пучков, порожденных третьей краевой задачей

Рассматривается спектральная взаимосвязь операторов, порожденных краевой задачей и краевой задачей Дирихле, для квадратичных дифференциальных операторных пучков.

Գ. Ա. Սարգսյան

Երրորդ եզրային խնդրից ծնված դիֆերենցիալ օպերատորային փնջերի սեփական ֆունկցիաների մասին

Ուսումնասիրվում է օպերատորների սպեկտրալ փոխկապակցությունը քառակուսային օպերատորային փնջի համար՝ ծնված եզրային եւ Դիրիխլեի խնդիրներից:

G. A. Sargsyan

On Eigenfunctions of Diferencial Operator Bundles Generated by the Third Boundary Problem

The spectral correlation of operator bundles generated by boundary and Dirichled problems is investigated.

Литература

1. Келдыш М. В. - ДАН СССР. 1951. Т. 77. N1. С. 11-14.
2. Крейн М. Г., Лангер Г. К. - Тр. Междунар. симп. по применению т.ф.к.п в механике сплошной среды. Наука. М. 1965.

3. Александрян Р. А. - ТМО. 1960. Т. 9. С. 455-505.
4. Зеленяк Т. И. - ДАН СССР. 1964. Т. 158. N6. С. 1268-1270.
5. Вирибян Г. В. - ДАН АрмССР. 1966. Т. 43. N 1. С.15-20.
6. Вирибян Г. В. - ДАН АрмССР. 1969. Т. 48. С. 65-70.
7. Акопян Г. С. - ДАН АрмССР. 1980. Т. 70. N2. С. 80-84.
8. Акопян Г. С. - ДАН АрмССР. 1988. Т. 86. N4. С. 147-152.
9. Саргсян Г. А. - Уч. зап. ЕГУ. 1994. N1. С. 19-25.
10. Саргсян Г. А. - ДНАН Армении. 2006. Т. 106. N3. С. 211-217.
11. Саргсян Г. А. - ДНАН Армении. 2006. Т. 106. N4. С. 291-296.