ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 109 2009 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517

С. А. Алексанян

Равномерное и касательное приближение мероморфными функциями с оценкой их роста

(Представлено академиком Н. У. Аракеляном 24/XI 2008)

Ключевые слова: *полоса, угол, равномерная, касательная, меромофная аппроксимация*

Рассматривается задача равномерного и касательного приближения голоморфных на полосе (угле) функций мероморфными с оценкой их роста. Эта задача для угла исследовалась в [1] и [2]. Аналогичные приближения на вещественной оси $\mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемых функций рассматривались в [3]. Целью настоящей работы является конструирование мероморфных функций, аппроксимирующих заданную функцию f на полосе (угле) и имеющих возможно медленный рост на комплексной плоскости. Рост аппроксимирующих функций оценивается в терминах их неванлинновской характеристики. Задача равномерного и касательного приближения на полосе *целыми* функциями исследована в [4].

1. Для формулировки полученных результатов введем необходимые обозначения. Пусть $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно множества вещественных и комплексных чисел. Для множества $E \subset \mathbb{C}$ *замыкание, внутренность* и *границу* E в $\mathbb{C}$ обозначим соответственно через $\overline{E}$, E^{o} и ∂E.

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$ и E — относительно замкнутое множество в Ω. Для класса $C(E)$ непрерывных функций $f : E \to \mathbb{C}$ через f_∂ обозначим сужение f на ∂E и введем равномерную норму

$$\|f\|_E = \sup_{z\in E} |f(z)|$$

и

$$C_b(E) := \{f \in C(E) : \|f\|_E < +\infty\}.$$

Пусть $C^p(\Omega)$ — класс p раз непрерывно дифференцируемых (в смысле $\mathbb{R}^2$) комплексных функций в Ω. Как обычно, $H(\Omega)$ обозначает класс функций, голоморфных в Ω так, что условие $f \in H(\Omega)$ означает, что $f \in C^1(\Omega)$ и $\bar\partial f \equiv 0$ в Ω. Для относительно замкнутого множества $E \subset \Omega$ положим $A(E) = C(E) \cap H(E^o)$, $A_b(E) = C_b(E) \cap H(E^o)$ и пусть $A'(E)$, $A''(E)$,..., $A^p(E)$ обозначают классы функций $E \to \mathbb{C}$, один, два и соответственно p раз непрерывно дифференцируемых в E в смысле $\mathbb{C}$.

Положим также

$D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ для $r > 0$ — открытый круг;

$S_h := \mathbb{R} \times [-h, h]$ для $h > 0$ — полоса;

$\Delta_\alpha := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg \zeta| \le \alpha/2\}$ для $\alpha \in (0, 2\pi)$ — угол;

$\Omega_h^\alpha := \mathbb{C} \setminus (\Delta_{\pi-\alpha}(-\pi/2, -2ih)^o \cup \Delta_{\pi-\alpha}(\pi/2, 2ih)^o) \cup S_{2h}$ для $h > 0$.

$T(r, g)$ — неванлинновская характеристика мероморфной функции g, $g(0) \ne \infty$:

$$T(r, g) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + \int_0^r n(t, g)\, t^{-1} dt,$$

где $n(t, g)$ число *полюсов* g в D_t (учитывая их кратности).

Для $f \in C(E)$, где $E \subset \mathbb{C}$ закрытое и неограниченное множество, так что $E \cap \partial D_r \ne \emptyset$ для $r \ge r_0 \ge 0$, обозначим

$$M_f(r) = M_f(r, E) := \|f\|_{E \cap D_r}.$$

Обозначим через B класс неубывающих C^1-функций $q \ge 0$ в $\mathbb{R}^+$, для которых существует конечный предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{rq'(r)}{q(r)} = \rho.$$

2. Процесс оптимально равномерного и касательного приближения на полосе мероморфными функциями реализуется двумя шагами (см. лемму 1 и теорему 1).

Теорема 1. *Для $F \in A(\Omega_h^\alpha)$, $\alpha \in (0, \pi/2)$, $p > 1$ и $\varepsilon > 0$, существует мероморфная функция G с полюсами на мнимой оси такая, что*

$$|F(z) - G(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in S_h \tag{1}$$

и

$$T\left(r, \varepsilon^{-1}G\right) < c \int_h^{pr} \int_h^t \log^+ \frac{M_F(\tau)}{\varepsilon} \frac{d\tau dt}{\tau t} + c \log^+(pr) \text{ для } r \ge h, \tag{2}$$

где $c = c(h, p, \alpha) > 0$ — постоянная, зависящая лишь от h, α и p.

В доказательстве теоремы 1 используется лемма 1 из работы [2], с. 548-549.

Следствие 1. *Из теоремы 1 и (1)-(2) следует, что функцию $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ порядка $\rho_F < +\infty$ можно равномерно приблизить на S_h мероморфными функциями G с $T(r, G) = O(r^{\rho_F})$, при $r \to +\infty$.*

Теорема 2. *Пусть $f \in A''(S_h)$, $q \in B$,$q \geq 1$, $\varepsilon > 0$ и $p > 1$. Тогда существует мероморфная функция g такая, что*

$$|f(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{q(|z|)} \text{ для } z \in S_h,$$

$$T\left(r, \varepsilon^{-1} g\right) < k \int_h^{pr} \int_h^t \left[\frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M(\tau, f)}{\varepsilon}\right] \frac{d\tau dt}{\tau t} + \\ + k\left[1 + \log q(r)\right] \log^2(pr) \text{ для } r \geq h,$$

где

$$a_r(f) = 1 + \frac{k}{\varepsilon} \max_{|z| \leq lr+h} \left[|z|^2 \left|f''_\partial(z)\right|\right],$$

и $k = k(p, q, h) > 0$.

Доказательство теоремы 2 основано на теореме 1, лемме 2 из работы [3], с. 542, и следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть $f \in A''(S_h)$ и $\varphi \in A(\Omega_h^\alpha)$ для $\alpha \in (0, \pi/2)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ такая, что*

$$\|f\varphi - F\|_{S_h} < \varepsilon,$$

$$M_f(r) < 3M_f(lr + h) M_\varphi(r) + c\varepsilon \exp\{c a_{2r}\},$$

где

$$a_r(f, \varphi) = 1 + \frac{c}{\varepsilon} \max_{|z| \leq lr+h} \left[|z|^2 \left|f''_\partial(z)\right|\right] M_\varphi(lr + h),$$

$l = 1 + \tan(\alpha/2) > 1$, и $c = c(h, \alpha) > 0$ — константа зависящая лишь от α и h.

3. В работе [4] доказано, что если функция $f \in A''_b(S_h)$ равномерно непрерывна на ∂S_h, то ее можно приблизить целыми функциями порядка 1 и этот порядок нельзя уменьшить. Из теоремы 2 с $q \equiv 1$ мы можем предложить новые условия на f, из которых следовало бы, что она может быть равномерно приближена на S_h *мероморфными* функциями g порядка $\rho \in (0, 1)$.

Определение 1. *Скажем, что мероморфная функция g с полюсами на мнимой оси принадлежит к классу M^ρ, если g ограничена на S_h и*

$$T(r, g) = O(r^\rho) \ \ r \to \infty.$$

Теорема 3. *Пусть $\nu_0(r) = r^{\rho/2}$ для $r \geq 0$, и $\nu(-r) = -\nu(r)$; положим $\mu(z) = \mu_0(x) + iy$ для $z = x + iy \in S_h$, где $\mu_0 = \nu^{-1}$ на $\mathbb{R}$. Если $f \in A''_b(S_h)$, $(f \circ \mu)'$ и*

$(f\circ\mu)''$ *ограничены на* ∂S_h, *то* f *допускает равномерное приближение на* S_h *функциями из класса* M^p.

Замечание 1. *Условие равномерной непрерывности на* S_h *функции* $(f\circ\mu)$ *необходимо для возможности равномерного приближения функции* $f\in A_b(S_h)$ *функциями из класса* M^p.

4. Приведем теперь формулировки результатов для угла, где в отличие от работ [1] и [2] приближение осуществляется на заданном угле Δ_α, а не на $\Delta_{\alpha-\delta}$, $\delta>0$.

Теорема 4. *Пусть* $f\in A''(\Delta_\alpha), p>1$ *и* $\varepsilon>0$. *Тогда существует* g *мероморфная фунция такая, что*

$$|f(z)-g(z)|<\varepsilon, z\in\Delta_\alpha, |z|\geq 1, \tag{3}$$

$$T(r,\varepsilon^{-1}g)<k\int_1^{pr}\int_1^t\Big[\frac{a_\tau(f)}{\varepsilon}+\log^+\frac{M_f(\tau)}{\varepsilon}\Big]\frac{d\tau dt}{\tau t}+k\log^2(pr)r\geq 1$$

где

$$a_r(f)=1+\frac{k}{\varepsilon}\max_{|z|\leq lr}[|z|^2|f''_\partial(z)|]$$

и $k=k(p,\alpha)>0$ *—константа. При этом если* $\alpha<\pi$, *то можно считать, что полюсы* g *лежат на мнимой оси, а при* $\alpha\geq\pi$ *они лежат на* $(-\infty,0)$.

Доказательство теоремы 4 основано на теореме 1 из [2] и на следующей лемме

Лемма 2. *Пусть* $f\in A''(\Delta_\alpha)$ *для* $\alpha\in(0,2\pi)$ *и* $\alpha<\beta<\min\{2\pi,\alpha+\pi/2\}$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует функция* $F\in A(\Delta_\beta)$ *такая, что*

$$\|f-F\|_{\Delta_\alpha}<\varepsilon,$$

$$M_f(r)<3M_f(lr)+c\varepsilon\exp\{ca_{2r}\},$$

где

$$a_r(f)=1+\frac{c}{\varepsilon}\max_{|z|\leq lr}[|z|^2|f''_\partial(z)|],$$

$l=1+\tan\{(\beta-\alpha)/2\}>1$ *и* $c=c(\alpha,\beta)>0$ *— константа, зависящая только от* α *и* β.

Замечание 2. *Если в теореме 4 условие* $f\in A''(\Delta_\alpha)$ *заменить условием* $f\in A''(\Delta_\alpha\bigcup\overline{D}_1)$, *то тогда приближение вида (3) можно обеспечить не только на* $\Delta_\alpha\setminus D_1$, *но и на* Δ_α.

Институт математики НАН РА

С. А. Алексанян

Равномерное и касательное приближение мероморфными функциями с оценкой их роста

В этой работе рассматривается задача равномерного приближения заданной функции на полосе (угле) мероморфными функциями. От приближающей функции требуем, чтобы она была аналитична в полосе (угле) и имела непрерывную производную второго порядка на полосе (угле). При этом определено расположение полюсов на комплексной плоскости. В случае полосы еще рассматривается вопрос касательного приближения.

Ս. Հ. Ալեքսանյան

Հավասարաչափ եւ շոշափումային մոտավորություններ մերոմորֆ ֆունկցիաներով՝ նրանց աճի գնահատմամբ

Աշխատանքում դիտարկվում է շերտի(անկյան) վրա տրված ֆունկցիան՝ մերոմորֆ ֆունկցիաներով հավասարաչափ մոտավորության խնդիրը: Մոտարկվող ֆունկցիայից պահանջվում է, որ այն լինի անալիտիկ շերտի(անկյան) ներսում եւ ունենա երկրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալ,ընդհուպ մինչեւ եզրը: Ընդ որում ճշգրտված է մոտարկող ֆունկցիաների բեւեռների դասավորությունը կոմպլեքս հարթության վրա: Շերտի դեպքում դիտարկվում է նաեւ շոշափումային մոտավորության խնդիրը:

S. H. Aleksanian

Uniform and Tangential Approximation by Meromorphic Functions with Estimates of their Growth

In this paper we consider the problem of uniform approximation of given function on a stripe (sector) by meromorphic functions. The approximable function is holomorphic on the interior of stripe (sector) and two times continuously differentiable on a stripe (sector). In addition, we can discripe the set of the poles of approximating functions on the complex plane. For the stripe is discussed the problem of tangential approximation, too.

Литература

1. *Тер-Исраелян Л. А.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1971. Т. 6. N 1. С. 67-80.

2. *Аветисян Р. А., Аракелян Н. У.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1988. Т. 23. N. 6. С. 546-556.

3. *Аветисян Р. А., Аракелян Н. У.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1990. Т. 25. N. 6. С. 534-548.

4. *Arakelian N., Shahgholian H.* - Computational Methods and Function Theory. 2003. V. 3. N. 1. P. 359-381.