ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Volume 108 2008 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек

(Представлено 24/VII 2008)

Ключевые слова: *микрополярная теория, упругая тонкая оболочка, общая двумерная теория*

Для решения задач микро- и наномеханики [1] весьма актуально построение общих теорий пластин и оболочек на основе несимметричной (микрополярной, моментной) теории упругости [2]. Асимптотический метод позволяет из трехмерной несимметричной теории упругости построить вполне адекватную общую прикладную-двумерную теорию тонких микрополярных оболочек. В работах [3-5] построены теории микрополярных оболочек со свободным вращением и со стесненным вращением. В работе [6] показано, что в зависимости от значений безразмерных физических параметров микрополярных пластин возможно построение теорий микрополярных пластин со свободным вращением; со стесненным вращением; "с малой сдвиговой жесткостью".

В данной работе построены общие теории микрополярных оболочек со свободным вращением; со стесненным вращением; "с малой сдвиговой жесткостью" в зависимости от безразмерных физических параметров материала оболочки.

1. **Постановка задачи.** Будем рассматривать оболочку толщиной $2h$ как трехмерное упругое тело. Основными уравнениями определения напряженно-деформированного состояния (НДС) микрополярного упругого тела являются [7]:

уравнения равновесия:

$$\nabla_m \sigma^{mn} = 0, \ \nabla_m \mu^{mn} + e^{nmk} = 0; \tag{1.1}$$

физические соотношения:

$$\begin{cases} \sigma_{mn} = (\mu+\alpha)\gamma_{mn} + (\mu-\alpha)\gamma_{nm} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{nm}, \\ \mu_{mn} = (\gamma+\varepsilon)\kappa_{mn} + (\gamma-\varepsilon)\kappa_{nm} + \beta\kappa_{kk}\delta_{nm}; \end{cases} \tag{1.2}$$

геометрические соотношения:

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn}w^k, \ \kappa_{mn} = \nabla_m w_n. \tag{1.3}$$

Здесь σ^{nm}, μ^{nm} — контравариантные, а σ_{nm}, μ_{nm} — ковариантные компоненты тензоров силовых и моментных напряжений; γ_{mn}, κ_{mn} — ковариантные компоненты тензоров деформаций и изгиба-кручения; V_n, w_n — ковариантные компоненты векторов перемещения и независимого поворота; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — физические константы для микрополярного тела оболочки. Индексы m, n, k принимают значения 1, 2, 3.

Примем обычную триортогональную систему координат α_n для изучения оболочек [8]. Для физических компонент рассматриваемых тензоров и векторов оставим принятые выше обозначения.

Пусть на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ заданы соответствующие компоненты силового и моментного тензоров напряжений. На поверхности края оболочки Σ примем один из вариантов граничных условий несимметричной теории упругости (в дальнейшем для определенности принимаются граничные условия первого варианта несимметричной теории упругости).

2. **Преобразование трехмерных уравнений микрополярной теории упругости.** Для удобства введем несимметричный тензор силовых напряжений [8] и аналогичный тензор для моментных напряжений [3]:

$$\begin{aligned} &\tau_{ii} = \left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\sigma_{ii}, \ \tau_{ij} = \left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\sigma_{ij}, \\ &\tau_{i3} = \left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\sigma_{i3}(i \leftrightarrow 3), \ \tau_{33} = \left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\sigma_{33}, \\ &\nu_{ii} = \left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\mu_{ii}, \ \nu_{ij} = \left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\mu_{ij}, \\ &\nu_{i3} = \left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\mu_{i3}(i \leftrightarrow 3), \ \nu_{33} = \left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\mu_{33}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь и в дальнейшем индексы i, j принимают значения 1, 2, притом $i \neq j$.

В обозначениях (2.1) основная система микрополярного упругого тела принимает вид [3]:

уравнения равновесия:

$$L_i + \frac{\tau_{i3}+\tau_{3i}}{R_i} + \left(1+\frac{\alpha_3}{R_i}\right)\frac{\partial \tau_{3i}}{\partial \alpha_3} = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&K_i + \frac{\nu_{i3} + \nu_{3i}}{R_i} + \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right)\frac{\partial \nu_{3i}}{\partial \alpha_3} - (-1)^j\left(\tau_{3j} - \tau_{j3}\right) = 0,\\
&-L + F + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial \alpha_3} = 0,\\
&\quad -K + \Phi + \frac{\partial \nu_{33}}{\partial \alpha_3} + \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right)\tau_{12} - \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right)\tau_{21} = 0;
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

физико-геометрические соотношения:

$$
\begin{aligned}
&\left(1 + \tfrac{a_3}{R_j}\right) e_i = \tfrac{1}{E}\left(1 + \tfrac{a_3}{R_i}\right)\tau_{ii} - \tfrac{\nu}{E}\left(1 + \tfrac{a_3}{R_j}\right)\tau_{jj} - \tfrac{\nu}{E}\tau_{33};\\
&\left(1 + \tfrac{a_3}{R_1}\right)\left(1 + \tfrac{a_3}{R_2}\right)\tfrac{\partial V_3}{\partial a_3} = \tfrac{1}{E}\tau_{33} - \tfrac{\nu}{E}\left(1 + \tfrac{a_3}{R_1}\right)\tau_{11} - \tfrac{\nu}{E}\left(1 + \tfrac{a_3}{R_2}\right)\tau_{22};\\
&\left(1 + \tfrac{a_3}{R_j}\right) t_j - (-1)^j\left(1 + \tfrac{a_3}{R_i}\right)\left(1 + \tfrac{a_3}{R_j}\right) w_3 = \tfrac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\left(1 + \tfrac{a_3}{R_i}\right)\tau_{ij} - \tfrac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\left(1 + \tfrac{a_3}{R_j}\right)\tau_{ji};\\
&\left(1 + \tfrac{a_3}{R_j}\right)\tfrac{\partial V_i}{\partial a_3} - (-1)^j\left(1 + \tfrac{a_3}{R_j}\right) w_j = \tfrac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\tau_{3i} - \tfrac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\tau_{i3};\\
&\left(1 + \tfrac{a_3}{R_j}\right) g_i + (-1)^j\left(1 + \tfrac{a_3}{R_i}\right)\left(1 + \tfrac{a_3}{R_j}\right) w_j = \tfrac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\left(1 + \tfrac{a_3}{R_i}\right)\tau_{i3} - \tfrac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\left(1 + \tfrac{a_3}{R_j}\right)\tau_{3i};\\
&\left(1 + \tfrac{a_3}{R_j}\right)\kappa_i = \tfrac{\beta+\gamma}{\gamma(3\beta+2\gamma)}\left(1 + \tfrac{a_3}{R_i}\right)\nu_{ii} - \tfrac{\beta}{2\gamma(3\beta+2\gamma)}\left(1 + \tfrac{a_3}{R_j}\right)\nu_{jj} - \tfrac{\beta}{2\gamma(3\beta+2\gamma)}\nu_{33};\\
&\left(1 + \tfrac{a_3}{R_1}\right)\left(1 + \tfrac{a_3}{R_2}\right)\tfrac{\partial w_3}{\partial a_3} = \tfrac{\beta+\gamma}{\gamma(3\beta+2\gamma)}\nu_{33} - \tfrac{\beta}{2\gamma(3\beta+2\gamma)}\left(1 + \tfrac{a_3}{R_1}\right)\nu_{11} - \tfrac{\beta}{2\gamma(3\beta+2\gamma)}\left(1 + \tfrac{a_3}{R_2}\right)\nu_{22};\\
&\left(1 + \tfrac{a_3}{R_j}\right) n_j = \tfrac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\left(1 + \tfrac{a_3}{R_i}\right)\nu_{ij} - \tfrac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}(1 + \tfrac{a_3}{R_j})\nu_{ji},\\
&\left(1 + \tfrac{a_3}{R_j}\right)\tfrac{\partial w_i}{\partial a_3} = \tfrac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\nu_{3i} - \tfrac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}(1 + \tfrac{a_3}{R_j})\nu_{i3};\\
&\left(1 + \tfrac{a_3}{R_i}\right)\theta_i = \tfrac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\left(1 + \tfrac{a_3}{R_i}\right)\nu_{i3} - \tfrac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\left(1 + \tfrac{a_3}{R_i}\right)\nu_{3i}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Граничные условия на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ будут выражаться так:

$$
\begin{aligned}
&\left[\tfrac{\tau_{3i}}{1+a_3/R_j}\right]_{a_3=\pm h} = \mp q_i^{\pm}, \quad \left[\tfrac{\tau_{33}}{(1+a_3/R_1)(1+a_3/R_2)}\right]_{a_3=\pm h} = \mp q_3^{\pm},\\
&\left[\tfrac{\nu_{3i}}{1+a_3/R_j}\right]_{a_3=\pm h} = \mp m_i^{\pm}, \quad \left[\tfrac{\nu_{33}}{(1+a_3/R_1)(1+a_3/R_2)}\right]_{a_3=\pm h} = \mp m_3^{\pm},
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&L_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \tau_{ii}}{\partial a_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial a_i}(\tau_{ii} - \tau_{jj}) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial a_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}(\tau_{ji} + \tau_{ij});\\
&L = \frac{\tau_{11}}{R_1} + \frac{\tau_{22}}{R_2}, \quad F = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \tau_{13}}{\partial a_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial a_1}\tau_{13} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial \tau_{23}}{\partial a_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial a_2}\tau_{23};\\
&K_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \nu_{ii}}{\partial a_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial a_i}(\nu_{ii} - \nu_{jj}) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial \nu_{ji}}{\partial a_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}(\nu_{ji} + \nu_{ij});\\
&K = \frac{\nu_{11}}{R_1} + \frac{\nu_{22}}{R_2}, \quad \Phi = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \nu_{13}}{\partial a_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial a_1}\nu_{13} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial \nu_{23}}{\partial a_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial a_2}\nu_{23}\\
&e_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial V_i}{\partial a_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_2}{\partial a_j}V_j + \frac{V_3}{R_i}, \quad t_i = \frac{1}{A_j}\frac{\partial V_i}{\partial a_j} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial a_i}V_j, \quad g_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial V_3}{\partial a_i} - \frac{V_i}{R_i};
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

$$\kappa_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial w_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} w_j + \frac{w_3}{R_i}, \ n_i = \frac{1}{A_j}\frac{\partial w_i}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} w_j, \ \theta_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_i} - \frac{w_i}{R_i}.$$

3. Асимптотический метод. Предполагается, что толщина оболочки мала по сравнению с характерными радиусами кривизны срединной поверхности оболочки. будем исходить из следующей основной концепции [8-10]: в статическом случае общее НДС тонкого трехмерного тела, образующего оболочку, состоит из внутреннего НДС, охватывающего всю оболочку, и погранслоев, локализующихся вблизи поверхности края оболочки Σ. При определении как внутреннего, так и краевого НДС, оболочки большую роль играют значения физических констант микрополярного материала оболочки. С этой точки зрения введем следующие безразмерные физические параметры:

$$\frac{\alpha}{\mu}, \ \frac{\beta}{R^2\mu}, \ \frac{\gamma}{R^2\mu}, \ \frac{\varepsilon}{R^2\mu}, \tag{3.1}$$

где R — некоторый характерный радиус кривизны срединной поверхности оболочки.

Для построения внутренней задачи введем новые независимые переменные, положив [8]

$$\alpha_i = R\lambda^{-p}\xi_i, \ \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta. \tag{3.2}$$

Здесь p, l — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $l > p \geq 0$, λ — большой постоянный безразмерный геометрический параметр, определямый формулой $h = R\lambda^{-l}$. Согласно асимптотическому методу наша цель при построении внутренней задачи будет заключаться в том, чтобы приближенно свести трехмерные (с независимыми переменными ξ_1, ξ_2, ζ) уравнения микрополярной теории упругости к двумерным уравнениям (с независимыми переменными ξ_1 и ξ_2).

Обращаясь к изучению краевых микрополярных упругих явлений, будем снова отправляться от уравнений трехмерной несимметричной теории упругости (2.2)-(2.3). Будем считать, что поверхность края оболочки Σ, вблизи которого надо исследовать напряженное состояние, задается уравнением $\alpha_1 = \alpha_{10}$, и введем замену независимых переменных по формулам [8]:

$$\alpha_1 - \alpha_{10} = R\lambda^{-l}\xi_1, \ \alpha_2 = R\lambda^{-p}\xi_2, \ \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta, \tag{3.3}$$

где величины R, λ, l, p имеют тот же смысл, что и при изучении внутренней задачи. Будем требовать, чтобы решение погранслойной задачи при удалении от торца $\alpha_1 = \alpha_{10}$ в глубь трехмерной оболочки имело затухающий характер, и всякий раз получать условия существования такого решения.

После построения асимптотических приближений внутренней задачи и задачи пограничного слоя общее НДС в микрополярной оболочке определяется суммой двух указанных задач. Определяя общее НДС в оболочке, можем удовлетворять трехмерным граничным условиям на поверхности края оболочки $\alpha_1 = \alpha_{10}$. Далее, используя условия затухания погранслойного решения, получим отдельные граничные условия на граничном контуре Γ срединной поверхности оболочки для внутренней(двумерной) задачи и граничные условия на поверхности края оболочки $\alpha_1 = \alpha_{10}$ для отдельных составляющих погранслойной задачи.

4. **Прикладная-двумерная теория микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.** Будем предполагать, что безразмерные физические параметры (3.1) имеют значения:

$$\frac{\alpha}{\mu} \sim 1, \ \frac{\beta}{R^2\mu} \sim 1, \ \frac{\gamma}{R^2\mu} \sim 1, \ \frac{\varepsilon}{R^2\mu} \sim 1. \tag{4.1}$$

На уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$ для величин внутренней задачи в трехмерной области оболочки получим соответствующие асимптотические представления, из которых вытекают следующие качественные результаты: компоненты векторов перемещения и независимого поворота — линейные функции от координаты α_3; силовые и моментные напряжения σ_{ii}, σ_{ij}, σ_{i3}, σ_{3i}, μ_{ii}, μ_{ij}, μ_{i3}, μ_{3i} — линейные функции от α_3.

В описании НДС внутренней задачи остается выяснить роль переменных (α_1, α_2), задающих положение точки на срединной поверхности оболочки. С этой точки зрения целесообразно введение вместо силовых и моментных напряжений статически эквивалентных им усилий и моментов:

$$\begin{aligned}
&T_{ii} = \int\limits_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R)\sigma_{ii}d\alpha_3, \ S_{ij} = \int\limits_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\sigma_{ij}d\alpha_3, \\
&G_{ii} = -\int\limits_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\sigma_{ii}\alpha_3 d\alpha_3, \\
&H_{ij} = \int\limits_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\sigma_{ij}\alpha_3 d\alpha_3, \ L_{ii} = \int\limits_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\mu_{ii}d\alpha_3, \\
&Lij = \int\limits_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\mu_{ij}d\alpha_3, \\
&N_{i3} = -\int\limits_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\sigma_{i3}d\alpha_3, \ L_{i3} = -\int\limits_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\mu_{i3}d\alpha_3, \\
&L_{33} = \int\limits_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_1)(1+\alpha_3/R_2)\mu_{33}d\alpha_3.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Используем также понятия перемещений и поворотов точек срединной поверхности оболочки $u_i, w, \Omega_i, \Omega_3$.

Здесь как главный результат на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$ приведем основную систему уравнений внутренней задачи, т.е. систему уравнений прикладной-двумерной теории микрополярных оболочек с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения равновесия:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(T_{ii}-T_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(S_{ji}+S_{ij})-(q_i^++q_i^-)=0;\\
\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(L_{ii}-L_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(L_{ji}+L_{ij})+\\
+(-1)^j(N_{3j}-N_{j3})-(m_i^++m_i^-)=0;\\
\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(A_1N_{23})}{\partial\alpha_2}\right]+(q_3^++q_3^-)=0;\\
\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2L_{13})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(A_1L_{23})}{\partial\alpha_2}\right]-(S_{12}-S_{21})+(m_3^++m_3^-)=0.
\end{gathered}\tag{4.3}$$

соотношения упругости:

$$\begin{gathered}
T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}],\; S_{ij}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}],\\
N_{i3}=-2h\frac{4\alpha\mu}{\alpha+\mu}\Gamma_{i3}-\frac{\alpha-\mu}{\alpha+\mu}N_{3i};\\
L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\chi_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\chi_{jj}\right]-h\frac{\beta}{\beta+2\gamma}(m_3^+-m_3^-),\\
L_{ij}=2h[(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}];\\
L_{i3}=-2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\chi_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}L_{3i},\quad \text{где}\quad N_{3i}=h(q_i^+-q_i^-),\; L_{3i}=h(m_i^+-m_i^-);
\end{gathered}\tag{4.4}$$

геометрические соотношения:

$$\begin{gathered}
\gamma_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial a_i}-\frac{u_i}{R_i},\; \Gamma_{i3}=\gamma_i+(-1)^j\Omega_j,\; \chi_{i3}=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial a_i}-\frac{\Omega_i}{R_i};\\
\Gamma_{ii}\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial a_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}u_j-\frac{w}{R_i},\; \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial a_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}u_i+(-1)^j\Omega_3;\\
\chi_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial a_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}\Omega_j-\frac{\Omega_3}{R_i},\; \chi_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial a_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}\Omega_i.
\end{gathered}\tag{4.5}$$

Изучая погранслой при условии (4.1), получим, что на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$ микрополярный погранслой имеет четыре составляющие — это плоские и антиплоские силовые и моментные невзаимосвязанные между собой погранслои в полуполосе: $0\le\xi_1'<\infty$, $-1\le\zeta\le 1$, для которых получены соответствующие условия затухания. Изучив задачу сращивания внутренней и погранслойной задач, получим граничные условия построенной двумерной теории:

$$\begin{gathered}
T_{11}\big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3,\; S_{12}\big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3,\; N_{13}\big|_\Gamma=-\int_{-h}^{h}p_3^*d\alpha_3,\\
L_{11}\big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}m_1^*d\alpha_3,\; L_{12}\big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}m_2^*d\alpha_3,\; L_{13}\big|_\Gamma=-\int_{-h}^{h}m_3^*d\alpha_3.
\end{gathered}\tag{4.6}$$

Таким образом, система двумерных уравнений (4.3)-(4.5) и граничные условия (4.6) определяют математическую модель упругой тонкой микрополярной оболочки с независимыми полями перемещений и вращений.

5. **Прикладная-двумерная теория микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением.** Предположим, что безразмерные физические константы материала оболочки (3.1) теперь представимы в виде:

$$\frac{\alpha}{\mu} \sim 1, \; \frac{\beta}{R^2\mu} = \lambda^{-2l}\beta_*, \; \frac{\gamma}{R^2\mu} = \lambda^{-2l}\gamma_*, \; \frac{\varepsilon}{R^2\mu} = \lambda^{-2l}\varepsilon_*, \; \beta_*, \gamma_*, \varepsilon_* \sim 1. \tag{5.1}$$

На уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$ получим асимптотические представления для величин внутренней задачи; в данном случае имеем, что компоненты вектора вращения в точках срединной поверхности оболочки выражаются через компоненты вектора перемещения в этих точках.

На уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$ приведем основную систему двумерных уравнений микрополярных оболочек со стесненным вращением:

уравнения равновесия:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(A_{ji} + S_{ij}) - (q_i^+ + q_i^-) = 0; \\
\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1N_{23})}{\partial \alpha_2}\right] + (q_3^+ + q_3^-) = 0;
\end{gathered} \tag{5.2}$$

$$\begin{gathered}
\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial \alpha_i}(G_{ii} - (-1)^jL_{ij}) + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}[(G_{ii} - (-1)^jL_{ij}) - (G_{jj} + (-1)^jL_{ji})] - \\
- \frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial \alpha_j}(H_{ji} + (-1)^jL_{jj}) - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}[(H_{ji} + (-1)^jL_{jj}) + (H_{ij} - (-1)^jL_{ii})] - \\
- N_{i3} + h(q_i^+ - q_i^-) + (-1)^j(m_j^+ + m_j^-) = 0;
\end{gathered}$$

соотношения упругости:

$$\begin{gathered}
T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}[\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}], \; S_{ij} = \frac{2Eh}{1+\nu}[\Gamma_{12} + \Gamma_{21}] + (-1)^j\frac{1}{2}(m_3^+ + m_3^-); \\
G_{ii} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}[K_{ii} + \nu K_{jj}], H_{ij} = \frac{Eh^3}{3(1+\nu)}[K_{12} + K_{21}] + (-1)^j\frac{1}{2}[(m_3^+ - m_3^-) + L_{33}]; \\
L_{ii} = 2h\left[\frac{4\gamma(\gamma+\beta)}{2\gamma+\beta}\chi_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{2\gamma+\beta}\chi_{jj}\right] + \frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33}, \; L_{ij} = 2h[(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij} + (\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}]; \\
L_{33} = \left(\frac{th(hk_1)}{hk_1} - 1\right)4h\gamma(\chi_{11} + \chi_{22}) - \frac{th(hk_1)}{k_1}(m_3^+ - m_3^-), \; k_1 = \sqrt{\frac{4\alpha}{\beta+2\gamma}};
\end{gathered} \tag{5.3}$$

геометрические соотношения:

$$\begin{gathered}
\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_j - \frac{w}{R_i}, \; \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_i; \\
K_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\beta_j, \; K_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \beta_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\beta_i, \; \beta_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}; \\
\chi_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_j - \frac{\Omega_3}{R_i}, \; \chi_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_i; \\
\Omega_i = -(-1)^j\beta_j, \; \Omega_3 = \frac{1}{2}(\Gamma_{21} - \Gamma_{12}).
\end{gathered} \tag{5.4}$$

Построив микрополярный погранслой соответственно случаю (5.1), получив условия затухания и, далее, изучив задачу сращивания внутренней задачи и погранслоев, определим граничные условия для двумерной теории (5.2)-(5.4):

$$\begin{gathered}
T_{11}\big|_\Gamma = \int_{-h}^{h} p_1^* d\alpha_3, \; S_{12}\big|_\Gamma = \int_{-h}^{h} p_2^* d\alpha_3, \; (L_{12} - G_{11})\big|_\Gamma = \int_{-h}^{h} (\alpha_3 p_1^* + m_2^*) d\alpha_3; \\
\left[-N_{13} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}(H_{12} - L_{11})\right]\Big|_\Gamma = \int_{-h}^{h}\left[p_3^* + \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}(\alpha_3 p_2^* - m_1^*)\right] d\alpha_3.
\end{gathered} \tag{5.5}$$

Система двумерных уравнений (5.2)-(5.4) и граничные условия (5.5) определяют математическую модель упругой тонкой микрополярной оболочки со стесненным вращением.

6. Прикладная-двумерная теория микрополярных оболочек "с малой сдвиговой жесткостью". Предположим теперь, что физические безразмерные параметры (3.1) представимы в виде:

$$\frac{\alpha}{\mu} = \lambda^{-2l+2p}\alpha_*, \quad \frac{\beta}{R^2\mu} \sim 1, \quad \frac{\gamma}{R^2\mu} \sim 1, \quad \frac{\varepsilon}{R^2\mu} \sim 1, \quad \alpha_* \sim 1. \tag{6.1}$$

Определяя величины для внутренней задачи на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$, получим на основе этих данных двумерные уравнения, величины "чисто моментного" происхождения отделяются и образуют отдельную систему уравнений. Для "силовой" части задачи получим своеобразную сдвиговую теорию оболочек, в которой углы поворота (сдвиговые деформации) обусловлены "чисто моментной" частью задачи.

Сформулируем эти отдельные группы двумерных уравнений.

Уравнения "чисто моментной" части задачи микрополярных оболочек:

уравнения равновесия:

$$\begin{gathered}\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(L_{ji} + L_{ij}) - (m_i^+ + m_i^-) = 0;\\ \frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1L_{23})}{\partial \alpha_2}\right] + (m_3^+ + m_3^-) = 0;\end{gathered} \tag{6.2}$$

соотношения упругости:

$$\begin{gathered}L_{ii} = 2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\chi_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\chi_{jj}\right], \quad L_{ij} = 2h[(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij} + (\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}];\\ L_{i3} = -2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\chi_{i3} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}L_{3i}, \quad \text{где} \quad L_{3i} = h(m_i^+ - m_i^-);\end{gathered} \tag{6.3}$$

геометрические соотношения:

$$\chi_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_j - \frac{\Omega_3}{R_i}, \quad \chi_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_i, \quad \chi_{i3} = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}. \tag{6.4}$$

Уравнения "чисто силовой" части задачи микрополярных оболочек:

уравнения равновесия:

$$\begin{gathered}\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(S_{ji} + S_{ij}) - (q_i^+ + q_i^-) = 0;\\ \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1N_{23})}{\partial \alpha_2}\right] + (q_3^+ + q_3^-) = 0;\\ N_{3i} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial G_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(G_{ii} - G_{jj}) - \frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(H_{ji} + H_{ij}) + h(q_i^- - q_i^-);\end{gathered} \tag{6.5}$$

соотношения упругости:

$$\begin{gathered}T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}[\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}], \quad S_{12} = S_{21} = 2h\mu[\Gamma_{12} + \Gamma_{21}], \quad N_{i3} = N_{3i} - 8h\alpha\Gamma_{i3};\\ G_{ii} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}[K_{ii} + \nu K_{jj}], \quad H_{12} = H_{21} = \frac{2h^3}{3}\mu[K_{12} + K_{21}];\end{gathered} \tag{6.6}$$

геометрические соотношения:

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial a_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}u_j-\frac{w}{R_i},\ \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial a_j}{\partial a_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}u_i,\ \Gamma_{i3}=-\beta_i+(-1)^j\Omega_j;$$
$$\beta_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial a_i}+\frac{u_i}{R_i},\ K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\beta_i}{\partial a_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}\beta_j,\ K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\beta_j}{\partial a_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}\beta_i; \tag{6.7}$$

Если коэффициент $8h\alpha$ будем трактовать как "сдвиговая-моментная жесткость" оболочки, тогда представленную двумерную теорию (6.2)-(6.4), (6.5)-(6.7) с учетом (6.1) можем трактовать как теорию микрополярных оболочек "с малой сдвиговой жесткостью".

Далее, построив микрополярный погранслой для случая (6.1) и изучив задачу сращивания внутренней задачи и погранслоя, получим соответствующие граничные условия для двумерной теории (6.2)-(6.4),(6.5)-(6.7):

$$L_{1i}\big|_\Gamma=\int_{-h}^{h} m_i^* d\alpha_3,\ L_{13}\big|_\Gamma=-\int_{-h}^{h} m_3^* d\alpha_3-\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\int_{-h}^{h} a_3 m_2^* d\alpha_3; \tag{6.8}$$

$$\begin{cases} T_{11}\big|_\Gamma=\int_{-h}^{h} p_1^* d\alpha_3,\ S_{12}\big|_\Gamma=\int_{-h}^{h} p_2^* d\alpha_3,\ G_{11}\big|_\Gamma=-\int_{-h}^{h}\alpha_3 p_1^* d\alpha_3; \\ \left(-N_{13}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial H_{12}}{\partial\alpha_2}\right)\Big|_\Gamma=\int_{-h}^{h} p_3^* d\alpha_3+\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\int_{-h}^{h}\alpha_3 p_2^* d\alpha_3. \end{cases} \tag{6.9}$$

Таким образом, двумерные уравнения (6.2)-(6.4),(6.5)-(6.7) и граничные условия (6.8),(6.9) определяют математическую модель микрополярных оболочек с "малой сдвиговой жесткостью".

Гюмрийский педагогический институт им. М Налбандяна

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек

На основе трехмерной несимметричной (моментной, микрополярной) теории упругости при помощи сингулярно-возмущенного асимптотического метода построена прикладная-двумерная теория микрополярных тонких оболочек.

Соответственно трем различным значениям безразмерных физических параметров построены прикладные-двумерные теории микрополярных оболочек со свободным вращением; со стесненным вращением; "с малой сдвиговой жесткостью".

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր տեսություն

Առաձգականության ոչ սիմետրիկ (մոմենտային, միկրոպոլյար) եռաչափ տեսության հիման վրա սինգուլյար-գրգռող ասիմպտոտիկ մեթոդի օգնությամբ կառուցված է միկրոպոլյար բարակ թաղանթների կիրառական-երկչափ տեսությունը:

Անչափ ֆիզիկական պարամետրերի երեք տարբեր արժեքներին համապատասխան կառուցված են անկախ պտույտներով, կաշկանդված պտույտներով եւ «փոքր սահքային կոշտության» միկրոպոլյար թաղանթի կիրառական-երկչափ տեսությունները:

Corresponding Member of NAS RA S. H. Sargsyan

The General Theory of Micropolar Thin Elastic Shells

On the basis of three-dimensional asymmetrical (momental, micropolar) theory of elasticity, with the help of singularly-disturbed asymptotic method the applied-two-dimensional theory of micropolar thin shells is constructed.

Depending on values of dimensionless physical parameters, the applied-two-dimensional theory of micropolar shells with independent fields of transition and rotations; the applied-two-dimensional theory of micropolar plates with the constraint rotation and the applied-two-dimensional theory of micropolar plates "with small shift rigidity" are constructed.

Литература

1. Перспективные материалы и технологии. Нанокомпозиты. Под ред. А.А Берлина, И. Г. Ассовского. М. Торус пресс. 2005. 288 с.

2. *Амбарцумян С. А.* Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван. Изд-во НАН Армении. 1999. 214 с.

3. *Саркисян С. О.* - Сб. докл. XIX Международной конференции по теории оболочек и пластин. Н. Новгород: 28-30 сентября 1999. Изд-во Нижегородского ун-та. 1999. С. 186-189.

4. *Никогосян Г. С., Саркисян С. О.* - Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. N1. С. 15-37.

5. *Никогосян Г. С., Саркисян С. О.* - Доклады НАН Армении. 2005. N2. С. 132-139.

6. *Саркисян С. О.* - Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. N1. С. 129-147.

7. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, etc. Pergamon Press.

1986. 383 p.

8. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М. Наука. 1976. 512 с.

9. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.

10. *Саркисян С. О.* Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван. Изд-во АН РА. 1992. 232 с.