ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Volume 108 2008 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

Р. А. Хачатрян

О звездных множествах и селекциях мультиотображений со звездными значениями

(Представлено чл.-кор. НАН РА В. А. Мартиросяном 21/X 2008)

Ключевые слова: *многозначное отображение (мультиотображение), крайняя точка, селекция (сечение), звездное множество, ядро множества, точечная непрерывность, непрерывное разбиение единицы, условие выпуклости с константой*

Задача существования селекций мультиотображений, обладающих определенными свойствами, весьма интересна и находит разнообразные приложения во многих областях математики. В частности, задача о существовании непрерывного сечения мультиотображения, восходящая к классической теореме Э. Майкла [1], получила в дальнейшем широкое развитие и нашла многочисленные приложения. Отметим лишь обзор [2], монографии [3,4], специально посвященные этому вопросу, а также работы [5-8]. Однако во всех этих работах предполагается, что мультиотображения имеют выпуклые значения и пространства определения отображений являются паракомпактными.

В настоящей работе рассматриваются мультиотображения с невыпуклыми значениями. С помощью однозначных аппроксимаций характеризуются мультиотображения со звездными значениями, а также отображения, удовлетворяющие условию выпуклости с некоторой константой [8]. В работе установлены следующие результаты:

а) введено понятие относительно крайней точки для звездных множеств. Обсуждаются связи между звездными множествами и липшицевыми функциями;

b) рассматривается вопрос о существовании непрерывных селекций мультиотображения со звездными значениями. Доказано, что любое измеримое сечение можно аппроксимировать в смысле сходимости почти всюду последовательностью непрерывных селекций;

c) доказываются теоремы существования непрерывных и гладких селекций для некоторых классов многозначных отображений со звездными значениями, представляющие собой варианты теоремы Э. Майкла.

1. Звездные множества и липшицевы функции. Пусть X — линейное пространство и $M \subset X$. Положим $M^0 = \{x \in M / \forall y \in M, \lambda y + (1-\lambda)x \in M, 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Подмножество $M^0 \subseteq M$ называется ядром множества M. Если $M^0 \neq \emptyset$, то множество M называется звездным. Нетрудно показать, что M^0 — выпуклое множество. Очевидно, что если M — выпуклое множество, то $M^0 = M$. Если отрезок $[x, y] \subseteq M$, то будем говорить, что точка y видна из x. Очевидно, что если $y_0 \in M^0$, то по определению из y_0 видны все точки множества M. Положим $L(x_0; A) = \bigcup\limits_{\lambda \geq 0} \lambda(x_0 - M^0)$.

Определение 1.1. *Точка $x_0 \in M$ называется крайней точкой M относительно M^0, если $(x_0 + L(x_0; M^0)) \cap M = \{x_0\}$.*

Геометрически это означает, что конус $x_0 + L(x_0; A)$ «опирает» множество M с внешней стороны в точке x_0. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.1. *Пусть X — банахово пространство и $M \subset X$ — звездное замкнутое ограниченное множество такое, что $M \neq M^0$. Тогда M имеет крайнюю точку относительно M^0.*

Теорема 1.2. *Пусть $M \subset R^n$ — компактное звездное множество и из точки $y_0 \in M$ видны все крайние точки множества M относительно M^0. Тогда $y_0 \in M^0$.*

Теорема 1.3. *Пусть функция $f(x)$ липшицева на замкнутой выпуклой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in R^n$. Тогда $M \equiv epi(f) = \{(\mu, x)/x \in U(x_0), \mu \geq f(x)\}$ — звездное множество и при некотором $\overline{\mu}$ и для всех $x \in U(x_0)$ $(\overline{\mu}, x) \in M^0$. Наоборот, если $f(x)$ — непрерывная функция, определенная в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 такая, что при некотором $\overline{\mu}$ и для всех $x \in U(x_0)$ $(\overline{\mu}, x) \in M^0$, то f липшицева в некоторой окрестности $V(x_0) \subset U(x_0)$ точки x_0.*

2. О непрерывных и гладких селекциях многозначных отображений со звездными значениями. Пусть X — хаусдорфово топологическое, а Y — банахово пространство и $a : X \to 2^Y$ многозначное отображение. Пусть $B_\varepsilon(0) \subset Y$ — открытый шар радиуса ε с центром в точке 0. Напомним следующие определения из [5].

Определение 2.1. *Селекцией для многозначного отображения $a : X \to 2^Y$ называется однозначное отображение $y : X \to Y$ такое, что $y(x) \in a(x)$ $\forall x \in X$.*

Определение 2.2. *Будем говорить, что многозначное отображение $a : X \to 2^Y$ полунепрерывно снизу в x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что $a(x_0) \subseteq a(x) + B_\varepsilon(0)$ $\forall x \in U(x_0)$.*

Определение 2.3. *Будем говорить, что многозначное отображение $a : X \to 2^Y$ полунепрерывно сверху в x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что $a(x) \subseteq a(x_0) + B_\varepsilon(0)$ $\forall x \in U(x_0)$. Многозначное отображение называется непрерывным в x_0, если оно одновременно полунепрерывно снизу и сверху в x_0.*

Определение 2.4. *Пусть X — метрическое пространство. Будем говорить, что многозначное отображение a удовлетворяет условию Липшица на множестве $E \subseteq X$, если существует число $L > 0$ такое, что $a(x_1) \subseteq a(x_2) + Ld(x_1, x_2)B_1(0)$ $\forall x_1, x_2 \in E$.*

Справедлива следующая теорема о существовании непрерывных селекций для многозначных отображений с выпуклыми значениями без предположения паракомпактности пространства X. Отметим, что условие паракомпактности существенно в классической теореме Э. Майкла.

Теорема 2.1. *Пусть X — хаусдорфово топологическое, а Y — сепарабельное рефлексивное банахово пространство; многозначное отображение $a : X \to 2^Y$ непрерывно. Пусть далее для каждого x множество $a(x)$ — выпуклый компакт. Тогда отображение a допускает непрерывную селекцию.*

В следующей теореме доказано, что для некоторых классов многозначных отображений со звездными значениями существуют гладкие селекции.

Теорема 2.2. *Пусть: 1) $E = [x_0, x_1]$ — отрезок из R^1, $a : E \to 2^{R^n}$ — полунепрерывное снизу отображение со звездными замкнутыми значениями; 2) отображение $a^0 : E \to 2^{R^n}$ также полунепрерывно снизу; 3) M — звездное замкнутое множество такое, что для любого $x \in [x_0, x_1]$ $\operatorname{int} a^0(x) \cap M^0 \neq \emptyset$. Тогда существует счетное число гладких селекций $\{y_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ отображения $a \cap M$ таких, что $a(x) \cap M = \bigcup_{i=1}^{\infty} y_i(x) \forall x \in E$.*

Доказательство. Предварительно покажем , что существует липшицево отображение $D(x)$ такое, что $D(x) \in \operatorname{int} a^0(x) \cap M^0 \forall x \in E$. Пусть $u_x \in \operatorname{int} a^0(x) \cap M^0$. Тогда из точечной непрерывности отображения a следует , что существует окрестность $U(x)$ точки x такая , что $u_x \in \operatorname{int} a^0(\overline{x}) \cap M^0$ $\forall \overline{x} \in U(x)$. Семейство $\{U_x\}_{x \in E}$ открытых окрестностей покрывает компактное множество E. Следовательно, существует конечное множество открытых окрестностей $\{U_i\}_{i=1}^n$, которое также покрывает множество E. Пусть точки u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такие, что $u_i \in \operatorname{int} a^0(x) \cap M^0$ $\forall x \in U_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Определим функции следующим образом: $\theta_i(x) = \min\{1, d(x, E \setminus U_i)\}$, $\theta(x) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(x)$, $\lambda_i(x) = \theta_i(x)/\theta(x)$. Эти функции непрерывны, поскольку функции расстояния $d(x, E \setminus U_i)$ удовлетворяют условию Липшица по x. Следовательно, функция $D(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)u_i$, $x \in E$, непрерывна и $\lambda_i(x) = 0$, если $x \notin U_i$. Так как $u_i \in \operatorname{int} a^0(x) \cap M^0$ при $x \in U_i$, то $D(x) \in \operatorname{int} a^0(x) \cap M^0$ $\forall x \in E$. Покажем, что D удовлетворяет условию Липшица на компакте $\overline{E}$. Для этого достаточно показать, что функция $\lambda_i(x) = \theta_1(x)/\theta(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Так как функция расстояния $d(x, E \setminus U_i)$ удовлетворяет условию Липшица с константой 1, то и функции $\theta_1(x) = \min\{1, d(E \setminus U_i)\}$, $\theta(x) = \sum_{i\in I} \theta_i(x)$ также удовлетворяют этому условию. Так как E — компакт и $\theta(x) > 0$ $\forall x \in E$, то $m \equiv \min_{x\in E} \theta(x) > 0$. Положим $C_1 \equiv \max_{i\in I} \max_{x\in E} \theta_i(x)$, $C_2 \equiv \max_{x\in E} \theta(x)$. Пусть $x_1, x_2 \in E$. Имеем $|\lambda_i(x_1) - \lambda_i(x_2)| = \left|\frac{\theta_i(x_1)}{\theta(x_1)} - \frac{\theta_i(x_2)}{\theta(x_2)}\right| = \left|\frac{\theta_i(x_1)\theta(x_2) - \theta_i(x_2)\theta(x_1)}{\theta(x_1)\theta(x_2)}\right| \le$ $\le \frac{1}{m^2}(|\theta(x_2)| \cdot |\theta_i(x_1) - \theta_i(x_2)| + |\theta_i(x_2)| \cdot |\theta(x_1) - \theta(x_2)|) \le \frac{C_2 + C_1}{m^2} d(x_1, x_2)$.

Таким образом, однозначное отображение $D(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i(x)u_i$ удовлетворяет условию Липшица. Пусть теперь $\overline{u} \in \operatorname{int} a(\overline{x}) \cap M$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что $\overline{u} \in \operatorname{int} a(x)$ $\forall x \in B_\delta(\overline{x})$. Положим $\lambda(x) \equiv d(x, E \setminus \operatorname{int} B_\delta(\overline{x}))/(d(x, E \setminus \operatorname{int} B_\delta(\overline{x})) + d(x, B_{\delta/2}(\overline{x})))$. Можно показать, что функция $\lambda(x)$ также удовлетворяет условию Липшица на E. Очевидно, что $\lambda(x) = 1$ для $x \in B_{\delta/2}(\overline{x})$, $\lambda(x) = 0$ при $x \notin \operatorname{int} B_\delta(\overline{x})$ и $0 \le \lambda(x) \le 1$. Отсюда следует, что функция $y(x) \equiv \lambda(x)\overline{u} + (1 - \lambda(x))D(x)$ удовлетворяет условию Липшица и $y(x) \in a(x) \cap M$, $y(\overline{x}) = \overline{u}$. Рассмотрим сглаженные функции следующего вида: $y(x, \alpha) \equiv \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} y(x + t)dt$. Известно, что если $y(x)$ — липшицева функция, то $y(x, \alpha)$ сходится к $y(x)$ равномерно при $\alpha \to 0$. Поэтому последовательность непрерывно-дифференцируемых функций $H(x, \alpha) \equiv \lambda(x, \alpha)\overline{u} + (1 - \lambda(x, \alpha))D(x, \alpha)$ равномерно сходится к $y(x)$ в области E. Далее, поскольку $D(x) \in \operatorname{int} a^0(x)$ для любого $x \in E$, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что $D(x) + B_\varepsilon(0) \in a^0(x)$. В самом деле, согласно поточечной непрерывности a^0 для любого $x \in E$ существуют число $\varepsilon_x > 0$ и окрестность U_x точки x такие, что $D(x) + B_{\varepsilon_x}(0) \subseteq a^0(x')$ $\forall x' \in U_x$. Семейство $\{U_x\}_{x\in E}$ этих окрестностей покрывает компактное множество E. Следовательно, из него можно выделить конечное подпокрытие $\{U_i\}_{i\in I}$. Положим $\varepsilon = \min_{i\in I} \varepsilon_i$. Тогда очевидно, что $D(x) + B_\varepsilon(0) \subseteq a^0(x)$ $\forall x \in E$. Так как $D(x, \alpha) \to D(x)$ равномерно при $\alpha \to 0$, то при достаточно малых α и для всех $x \in E$ имеем $D(x, \alpha) \in D(x) + B_\varepsilon(0)$. Значит, $D(x, \alpha) \in a^0(x)$ для малых $\alpha > 0$. Далее, поскольку $D(x, \alpha) \in M^0$ и $\overline{u} \in M$, то $H(x, \alpha) \in M$. Поэтому $H(x, \alpha) \in a(x) \cap M$. Заметим также, что если $|u| \le \frac{\delta}{2}$, то $y(\overline{x} + u) = \overline{y}$. Следовательно, для достаточно малых $\alpha > 0$ $H(\overline{x}, \alpha) = \overline{y}$. Множество всех гладких селекций отображения $a(x) \cap M$ обозначим через $\mathfrak{Y}$. Так как $\overline{x}$ и $\overline{u}$ — произвольные точки множеств E и $\operatorname{int} a(\overline{x}) \cap M$, соответственно, и так как $\overline{\operatorname{int} a(x) \cap M} = a(x) \cap M$, то $\operatorname{int} a(x) \cap M \subseteq \{y(x)/y \in \mathfrak{Y}\} \subseteq a(x) \cap M$ $\forall x \in E$. Поэтому множество

$\{y(x)/y \in \mathfrak{Z}\}$ всюду плотно в $a(x) \cap M$ для всех $x \in E$. Но тогда подмножество $\mathfrak{Z}$ из $C(E, R^n)$ содержит счетное всюду плотное подмножество $\{y_1, y_2, \dots\}$. Так как множество $\{y(x)/y \in \mathfrak{Z}\}$ всюду плотно в $a(x) \cap M$ для всех $x \in E$, то $\{y_1(x), y_2(x), \dots\}$ также всюду плотно в $a(x) \cap M$ для всех $x \in E$. Теорема доказана.

Теорема 2.3. *Пусть $E = [x_0, x_1]$ — отрезок из R^1; отображение $a : E \to 2^{R^n}$ со звездными компактными значениями липшицево на E. Пусть далее отображение $a^0 : E \to 2^{R^n}$ непрерывно и для любого $x \in E$ $\mathrm{int}\, a^0(x) \neq \emptyset$. Тогда существует счетное число гладких селекций $\{y_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ отображения a таких, что $a(x) = \bigcup_{i=1}^{\infty} y_i(x)$ и градиенты этих селекций равномерно ограничены.*

3. Непрерывные и измеримые селекции многозначных отображений со звездными значениями. Здесь предполагается, что $Y = R^n$.

Определение 3.1[5]. *Пусть X — метрическое пространство, $(X, \sum, \mu)$ — положительное, конечное и регулярное пространство с мерой μ. Многозначное отображение $a : X \to 2^{R^n}$ называется μ-измеримым, если для любого открытого множества C из R^n множество $\{x \in X : a(x) \cap C \neq \emptyset\}$ μ-измеримо.*

Следующий результат аналогичен теореме Кастена[5] о представлении измеримых замкнутозначных отображений. Однако здесь замкнутость значений мультиотображений не предполагается.

Теорема 3.1. *Пусть X — компактное метрическое пространство; отображение $a : X \to 2^{R^n}$ со звездными ограниченными значениями μ-измеримо. Предположим, что для каждого x $\mathrm{int}\, a^0(x) \neq \emptyset$. Тогда существует такое счетное семейство $\{y_1, y_2, \dots\}$ μ-измеримых селекций a, что можество $\bigcup_{i=1}^{\infty} y_i(x)$ всюду плотно в $a(x)$ для μ — почти всех $x \in X$.*

Справедливы следующие теоремы о существовании непрерывных селекций для некоторых классов мультиотображений с невыпуклыми значениями.

Теорема 3.2. *Пусть X — метрическое пространство, отображения $a : X \to 2^Y$, $a^0 : X \to 2^Y$ полунепрерывны снизу. Пусть далее множества $a(x)$ компактны и $\mathrm{int}\, a^0(x) \neq \emptyset$ для любого $x \in X$. Тогда для любых точек $x_0 \in X$, $y_0 \in a(x_0)$ существует такая непрерывная селекция $y : X \to Y$ отображения a, что $y(x_0) = y_0$.*

Доказательство. Покажем сперва, что отображение a точечно непрерывно. Пусть $\bar{y} \in \mathrm{int}\, a(x_0)$ и $\bar{y} \in \mathrm{int}\, a^0(x_0)$. Поскольку многозначное отображение $a^0(x)$ точечно непрерывно [5], то существуют $\varepsilon > 0$ и окрестность $U(x_0)$ такие, что $B(\bar{y}, \varepsilon) \subseteq a^0(x)$ $\forall x \in U(x_0)$. Тогда на границе множества $a(x_0)$ существует такая точка z_0, что $\bar{y} \in \mathrm{int}\, K(z_0)$, где $K(z_0) = \{y/y = \lambda z_0 + (1-\lambda)u,\ u \in B_\varepsilon(\bar{y}),\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Так как $z_0 \in a(x_0)$ и a полунепрерывно снизу, то для любой окрестности $V(z_0)$ точки z_0 существует такая окрестность $U_1(x_0) \subseteq U(x_0)$

точки x_0, что $a(x) \cap V(z_0) \neq \emptyset$. С другой стороны, поскольку многозначное отображение $z \to K(z)$ с выпуклыми значениями точечно непрерывно, то существуют $\delta > 0$ и окрестность $V_1(z_0) \subseteq V(z_0)$ такие, что $B_\delta(\bar{y}) \subseteq K(z)$ $\forall z \in V_1(z_0)$. Но, если $z \in a(x) \cap V_1(z_0)$, то $B_\delta(\bar{y}) \subseteq K(z) \subseteq a(x)$ $\forall x \in U_1(x_0)$. Итак, показано, что отображение a точечно непрерывно. Поэтому для любого $y \in \operatorname{int} a(x)$ существуют такие окрестности $V(y)$, $U_y(x)$, что $V(y) \subseteq a(x')$, $\forall x' \in U_y(x)$. Пусть $U_y = \bigcup\limits_{x \in X} U_y(x)$. Система $\{U_y\}_{y \in Y}$ открытых множеств образует открытое покрытие пространства X. Пусть $\{U_{y_j}\}_{j \in J}$ — локальное конечное подпокрытие этого покрытия. Рассмотрим $\{p_{y_j}\}_{j \in J}$ — разбиение единицы, соответствующее покрытию $\{U_{y_j}\}_{j \in J}$, и определим непрерывное отображение $D : X \to Y$ следующим образом: $D(x) = \sum\limits_{j \in J} p_{y_j}(x) y_j$. Определим также мультиотображение $b(x) \equiv \{y/y = \lambda y_0 + (1-\lambda) D(x),\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Очевидно, что оно полунепрерывно снизу и для любого x имеет место включение: $0 \in \operatorname{int}(a^0(x) - b(x))$. Тогда по теореме 1.3.2 [7] многозначное отображение $a \cap b$ с выпуклыми замкнутыми значениями полунепрерывно снизу, и поэтому по теореме Э. Майкла через точку (x_0, y_0), $y_0 \in a(x_0) \cap b(x_0)$ проходит непрерывная селекция отображения $a \cap b$. Ясно также, что это будет искомым сечением.

Теорема 3.3. *Пусть X — компактное метрическое пространство, отображение a удовлетворяет всем требованиям теоремы 3.2. Тогда, если $m(x)$ измеримая и ограниченная селекция отображения a, то существует последовательность $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывных селекций, сходящаяся почти всюду к $m(x)$.*

Одним из важных предположений предыдущих теорем является условие непрерывности ядер рассматриваемых отображений. Существуют примеры, показывающие, что отображения со звездными компактными значениями непрерывны, но ядра их не являются непрерывными отображениями. Однако, если мультиотображение со звездными значениями удовлетворяет и условию выпуклости с некоторой константой [8], то из его непрерывности следует непрерывность ядра.

Определение 3.2[8]. *Множество $M \subset R^n$ удовлетворяет условию выпуклости с константой θ, если для любых $y_i \in M$, $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$ (I — конечное множество индексов) таких, что $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i = 1$, выполняется $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i y_i \in M + \theta \cdot r^2 B_1(0)$, где $r = \max\limits_{i,j \in I} \|y_i - y_j\|$.*

Справедлива следующая

Теорема 3.4. *Пусть $a : X \to 2^Y$ — мультиотображение со звездными и компактными значениями. Пусть далее для любого x множество $a(x)$ компактно и удовлетворяет условию выпуклости с некоторой константой $\theta(x)$ и $\eta = \sup\limits_{x \in X} \theta(x) < +\infty$. Тогда, если a непрерывно в некоторой точке x_0 и*

$\operatorname{int} a^0(x_0) \neq \emptyset$, *то мультиотображение* $a^0 : X \to 2^Y$ *непрерывно в* x_0.

Полученные результаты предыдущих теорем можно применить к задаче управляемости с переменной областью управления. Рассмотрим линейную управляемую систему $\frac{dx}{dt} = Ax + u$, $x(t_0) = 0$, $u(t) \in a(t)$. Здесь $a(t)$ – мультиотображение, $A(n \times n)$ – матрица.

Множеством достижимости $K_R[t_0, t_1]$ назовем множество всех точек пространства R^n, в которые можно перейти на отрезке времени $E = [t_0, t_1]$ по решениям системы из начального состояния при всевозможных непрерывных управлениях $u(t) \in a(t)$. Аналогично определяется множество достижимости $K_L[t_0, t_1]$ при предположении, что допустимыми управлениями являются всевозможные измеримые селекции отображения a. Используя результаты теорем 3.3 и 3.4, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Пусть* $a : E \to 2^{R^n}$ – *непрерывное мультиотображение с компактными звездными значениями такое, что существует число* $\epsilon_0 > 0$ *такое, что* $B_{\epsilon_0}(0) \subseteq \operatorname{int} a^0(t)$ *для всех* $t \in E$, *мультиотображение* $a^0 : E \to 2^{R^n}$ *непрерывно; существует такой вектор* $v \in B_{\epsilon_0}(0)$, *что векторы* $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ *линейно независимы. Тогда множество* $K_R[t_0, t_1]$ *выпуклое и такое, что* $0 \in \operatorname{int} K_R[t_0, t_1]$ *и* $\overline{K_R[t_0, t_1]} = K_L[t_0, t_1]$.

Ереванский государственный университет
e-mail: protectdrive@gmail.com

Р. А. Хачатрян

О звездных множествах и селекциях мультиотображений со звездными значениями

Рассматривается вопрос о существовании непрерывного сечения многозначных отображений со звездными значениями, а также об аппроксимации измеримых сечений в смысле сходимости почти всюду последовательностью непрерывных селекций.

Ռ. Ա. Խաչատրյան

Աստղաձև բազմությունների և աստղաձև արժեքներով բազմարժեք արտապատկերումների սելեկցիաների մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է անընդհատ սելեկցիաների գոյությունը աստղաձև արժեքներով բազմարժեք ֆունկցիաներում: Դիտարկվում է նաև չափելի ճյուղերի մոտարկման հարցը անընդհատ սելեկցիաների միջոցով:

R. A. Khachatryan

About Star Like Sets and Selections of Multivalued Mappings with Star Like Values

The existance of continuous sections of multivalued mappings with star like values is investigated. The question of approximation of measurable selections with a sequence of continuous selections is investigated as well.

Литература

1. *Michael E.* - Ann. Math. 1956. V. 63. N2. P. 361-381.

2. *Michael E.* - Lect. Notes in Mach. Springer Verlag. Berlin. 1970. V. 171. P. 54-58.

3. *Parthasarathy T.* - Selection theorems and their applications. Lecture Notes in Mathematics. Springer - Verlag. Berlin-New York. 1972. V. 263.

4. *Repovs D., Semenov P.V.* - Continues selections of multivaluec mappings. Kluwer. Dordrecht. 1998.

5. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* - Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М. КомКнига. 2005.

6. *Гельман Б. Д.* - Вестник ВГУ. Серия "Физика. Математика." 2002. N2. C. 50-55.

7. *Хачатрян А.Р.* - О многозначных отображениях и ε-оптимальных решениях параметризованных задач оптимизации. Канд. дис. Ереван. 2006.

8. *Остапенко В.В.* - Укр. мат. журнал. 1995. Т. 47. N11. С. 1919-1925.