ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 108 2008 № 2

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Л.А. Мовсисян

К устойчивости анизотропной цилиндрической оболочки

(Представлено академиком Л.А.Агаловяном 29/XI 2007)

Ключевые слова: *анизотропия, цилиндрическая оболочка, осевое сжатие, критическое усилие, нормальное давление*

В [1] изучен ряд задач (изгиба, свободных колебаний, статической и динамической устойчивости) для цилиндрической оболочки при общем случае анизотропии в осесимметричной постановке. Рассматривался случай свободного опирания. Отметим, что условия для данного случая для изотропных и анизотропных оболочек отличаются. Здесь рассматриваются другие возможные случаи для тангенциальных условий. Помимо того, изучаются случаи жесткого защемления и одномерные задачи при внешнем давлении.

В [1] был поставлен вопрос, по-видимому впервые, своего рода оптимальности — как можно расположением направлений упругости добиваться наибольшего критического усилия и т.п.

1. Уравнение устойчивости при осевом сжатии интенсивностью P относительно прогиба для осесимметричного случая записывается следующим образом [1]:

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{Pl^2}{D_{11}}\frac{d^2w}{dx^2} + mw = ac_1 + bc_2, \tag{1.1}$$

$$m = \frac{12l^4}{R^2h^2}\frac{\Delta}{D_{11}\Delta_1},\ \Delta = det\|B_{ij}\|,\ \Delta_1 = B_{11}B_{66} - B_{16}^2,$$

$$a = \frac{12l^4}{Rh^3}\frac{\Delta_2}{B_{11}},\ b = \frac{12l^4}{Rh^3}\frac{\Delta_3}{B_{11}},\ \Delta_2 = \frac{B_{16}B_{26} - B_{12}B_{66}}{\Delta_1},\ \Delta_3 = \frac{B_{12}B_{16} - B_{11}B_{26}}{\Delta},$$

x — безразмерная координата: $0 \le x \le 1$.

Уравнение (1.1) отличается от (3.1) работы [1], где присутствует также член относительно производного второго порядка (исчезающий при изотропии), но вклад его в значение P_{kp} на порядок меньше, чем h/R, поэтому его влиянием пренебрегаем.

Усилия и другие компоненты перемещения имеют вид:

$$T_1 = C_1, \quad S = C_2,$$

$$u = \Delta_2 \frac{l}{R} \int w dx + \frac{B_{66} l}{h\Delta_1} C_1 x - \frac{B_{66} l}{h\Delta_1} C_2 x + C_7,$$

$$v = \Delta_3 \frac{l}{R} \int w dx + \frac{B_{11} l}{h\Delta_1} C_2 x - \frac{B_{16} l}{h\Delta_1} C_1 x + C_8. \tag{1.2}$$

На каждом конце оболочки должны быть поставлены четыре условия

В этом пункте относительно условий моментного происхождения принимается

$$w = M_1 = D_{11} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = 1. \tag{1.3}$$

Что касается тангенциальных условий, то возможны четыре случая:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & T_1 = S = 0, \\ \text{II.} & T_1 = v = 0, \\ \text{III.} & S = u = 0, \\ \text{IV.} & u = v = 0, \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = 1. \end{array} \tag{1.4}$$

В [1] рассмотрен случай I. Заметим, что для изотропных оболочек случаю свободного опирания соответствует вариант II.

Характеристическое уравнение (1.1) дает два корня с множителем $\pm$ минус единица в предположении $\delta \geq 1$:

$$S_1 = [\delta A(1 - \sqrt{1 - \delta^{-2}})]^{-1/2},$$

$$S_2 = [\delta A(1 + \sqrt{1 - \delta^{-2}})]^{-1/2}. \tag{1.5}$$

В дальнейшем покажем, что именно $\delta \geq 1$

Здесь

$$\delta = \frac{P}{P_0}, \; P_0 = 2\frac{D_{11}}{l^2}\sqrt{m}, \; A = \frac{2l^2}{Rh}\sqrt{\frac{3\Delta}{B_{11}\Delta_1}}. \tag{1.6}$$

В (1.6) P_0 — именно критическое усилие для случая I, рассмотренного в [1]

Запишем решение (1.1), удовлетворяющее условиям (1.3)

$$w = \frac{C}{S_2^2 - S_1^2}\left[1 - S_2^2(\operatorname{tg}\frac{S_1}{2}\sin S_1 x + \cos S_1 x) + S_1^2\left(\operatorname{tg}\frac{S_2}{2}\sin S_2 x + \cos S_2 x\right)\right],$$

$$C = \frac{a}{m} C_1 + \frac{b}{m} C_2. \tag{1.7}$$

Удовлетворяя условиям (1.4) для определения относительного критического усилия δ_{kp}, получаем следующее трансцендентное уравнение:

$$\frac{2}{S_2^2 - S_1^2}\left(\frac{S_1^2}{S_2}\operatorname{tg}\frac{S_2}{2} - \frac{S_2^2}{S_1}\operatorname{tg}\frac{S_1}{2}\right) + 1 + X_k = 0. \tag{1.8}$$

Для всех случаев уравнения отличаются только последним слагаемым X_k:

$$X_{II} = \frac{B_{11}\Delta}{(B_{12}B_{16} - B_{11}B_{26})^2},$$
$$X_{III} = \frac{B_{66}\Delta}{(B_{16}B_{26} - B_{12}B_{66})^2}, \tag{1.9}$$
$$X_{IV} = \frac{\Delta}{B_{11}B_{26}^2 + B_{12}^2B_{66} - 2B_{12}B_{26}}.$$

Для материала углепластика [2] с данными

$$E_1 = 181.4\text{ГПа},\ E_2 = 10.3\text{ГПа},\ G = 6.9\text{ГПа},$$

$$\mu_{12} = 0.016,\ \mu_{21} = 0.28$$

были произведены вычисления для определения δ_{kp}. Упругими постоянными A_{ij} для данного материала [3] будут:

$$A_{11} = 182.2,\ A_{22} = 10.35,\ A_{12} = 2.9,\ A_{66} = 6.9\text{ГПа}.$$

Изменение коэффициентов B_{ij} в зависимости от угла поворота φ главных направлений упругости по отношению к координатным линиям см. в [3] (с. 275).

В табл. 1 приведены изменения критического усилия (в ГП) для случая I в зависимости от угла φ:

$$P_{kp} = K\frac{h^2}{R},\ K = \sqrt{\frac{B_{11}\Delta}{3\Delta_1}} \tag{1.10}$$

Таблица 1

φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
K	25.016	18.473	17.116	17.059	25.016

В табл. 2 приведены относительные критические значения δ_{kp} в зависимости от l/R и $\frac{R}{h}$ для угла поворота $\varphi = \pi/4$. В каждой клетке помещены три значения δ_{kp} соответственно для случаев II-IV по (1.4).

Из приведенной таблицы можно сделать ряд очевидных выводов относительно изменения критических значений δ_{kp} в зависимости от параметров. Здесь подчеркнем два важных обстоятельства.

Таблица 2

δ_{kp}

R/h \ l/R	0.5	1	2	5	10
50	1.608 1.132 2.788	1.059 1.046 1.088	1.009 1.002 1.025	1.010 1.001 1.003	1.002 1.000 1.002
100	1.541 1.538 1.562	1.104 1.077 1.161	1.007 1.004 1.015	1.004 1.003 1.004	1.003 1.001 1.001
150	1.188 1.179 1.202	1.030 1.025 1.040	1.002 1.001 1.006	1.001 1.001 1.002	1.000 1.000 1.001

а) Если для случая I критическое усилие не зависит от длины оболочки, то для других случаев зависит, и для длинных оболочек эти величины почти одинаковы.

б) Как и следовало ожидать, для оболочки со свободными концами (относительно тангенциальных усилий, случай I) критическое усилие меньше, чем для других случаев, и, естественно, наибольшее значение получается при случае IV.

Теперь покажем, что не может быть $\delta < 1$. При таком предположении прогиб определяется формулой

$$w = e^{-\alpha x}(C_4 \cos\beta x + C_3 \sin\beta x) + e^{\alpha(x-1)}(C_5 \sin\beta(x-1) + C_4 \cos(x-1)) + C_?$$

где

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}(1-\delta), \quad \beta^2 = \frac{1}{2}A(1+\delta). \tag{1.11}$$

Покажем это, например, для случая II из (1.4), для краткости в предположении для длинной оболочки. В этом случае для определения δ_{min} получим уравнение

$$\left[1 + \frac{B_{11}\Delta}{(B_{12}B_{16} - B_{11}B_{26})^2}\right]\left(\frac{3\Delta R^2}{h^2 B_{11}\Delta_1}\right)^{1/4} = \frac{1-2\delta}{\sqrt{1-\delta}} \tag{1.12}$$

Левая часть (1.12) — большое положительное число, в то время как правая положительна только при $\delta < \frac{1}{2}$ и при этом дробь меньше единицы. Следовательно, предположение $\delta > 1$ верно.

2. Изучим случай, когда вместо I из (1.4) и (1.3) имеем (жесткая заделка в смысле балки)

$$w = w' = T_1 = S = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = 1. \tag{2.1}$$

Тогда для определения критического δ_{kp} получим трансцендентное уравнение

$$(S_1^2 + S_2^2)\sin S_1 \sin S_2 = 2S_1S_2(1 - \cos S_1 \cos S_2). \qquad (2.2)$$

В табл. 3 приведены значения δ_{kp} для этого случая.

Таблица 3

δ_{kp}

R/h \ l/R	0.5	1	2	5	10
50	1.809	1.255	1.063	1.014	1.002
100	1.565	1.135	1.035	1.006	1.002
150	1.314	1.088	1.025	1.004	1.001

Как и следовало ожидать, замена условия $w'' = 0$ на $w' = 0$ увеличивает значения критических усилий.

3. Для полноты картины рассмотрим также одномерные задачи, когда величины функции зависят от окружной координаты (плоское деформированное состояние). Тогда система уравнений устойчивости имеет вид

$$\begin{gathered}
C_{26}\left(\frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{dw}{d\theta}\right) + C_{66}\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0,\\
C_{22}\left(\frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{dw}{d\theta}\right) + C_{26}\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{D_{22}}{R^2}\frac{d^3w}{d\theta^3} = 0,\\
\frac{D_{22}}{R^2}\frac{d^4w}{d\theta^4} + C_{22}\left(\frac{dv}{d\theta} + w\right) + C_{26}\frac{du}{d\theta} + T_2^0\frac{d^2w}{d\theta^2} = 0.
\end{gathered} \qquad (3.1)$$

Изучим две задачи.

При внешнем нормальном давлении интенсивности q начальное кольцевое усилие $T_2^0 = Rq$.

Если искать решение (3.1) в виде

$$u = \varphi\sin n\theta,\ v = \psi\sin n\theta,\ w = f\cos n\theta, \qquad (3.2)$$

то для критического давления получим

$$q_{kp} = \frac{3D_{22}}{R^3}. \qquad (3.3)$$

Странно и интересно, что, хотя в системе (3.1) присутствуют почти все коэффициенты упругости, выражение критического давления по виду не отличается от изотропного случая [4].

Таким образом, система (3.1) в конечном счете эквивалентна уравнению

$$\frac{D_{22}}{R^2}\left(\frac{d^4w}{d\theta^4}+\frac{d^2w}{d\theta^2}\right)+T_2^0\frac{d^2w}{d\theta^2}=0. \tag{3.4}$$

Вторая задача такая — равные по величине сосредоточенные силы (четыре) действуют по взаимоперпендикулярным диаметрам к центру оболочки.

Выражение для T_2^0

$$T_2^0=RP\left[\delta(\theta)+\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+\delta(\theta-\pi)+\delta\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)\right] \tag{3.5}$$

разложим в ряд

$$T_2^0=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\cos m\theta,\ a_m=\frac{C_m}{1-m^2},$$
$$C_m=\frac{4PR}{\pi},\ C_0=\frac{2PR}{\pi},\ n=4k,\ k=1,2,\ldots \tag{3.6}$$

Решение (3.4) также будем искать в виде ряда

$$w=\sum_{m=0}^{\infty}f_m\cos n\theta. \tag{3.7}$$

Тогда для определения P_{kp} получаем бесконечную систему относительно f_n и из условия разрешимости этой системы определяется P_{kp} [5]. Во втором приближении (достаточно приемлемом)

$$P_{kp}=5.045\frac{D_{22}}{R^3} \tag{3.8}$$

Факт, что критическое усилие для анизотропной оболочки (одномерный случай) по виду не отличается от случая ортотропии, наблюдался также для пластинки, когда в основу положена классическая теория. И поэтому, по-видимому, в этих случаях нужно пользоваться уточненными теориями.

Данные в табл. 2 и 3 получены Г.Г.Нерсисяном, за что приношу благодарность.

Институт механики НАН РА

Л. А. Мовсисян

К устойчивости анизотропной цилиндрической оболочки

Рассматриваются задачи для анизотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Среди четырех возможных граничных условий относительно тангенциальных величин автором ранее рассматривался случай, когда условия заданы относительно силовых величин. Здесь изучаются случаи, когда хотя бы одно условие ставится для перемещения. Значения критических усилий для последних задач больше, чем для первой задачи.

Լ. Ա. Մովսիսյան

Անիզոփրոպ գլանային թաղանթի կայունության մասին

Դիփարկվում են անիզոփրոպ գլանային թաղանթի համար կայունության խնդիրներ առանցքային սեղմման դեպքում: Չորս հնարավոր փանգենցիալ եզրային պայմանների մի դեպքը, երբ պայմանները փրվում են ուժային մեծությունների համար, հեղինակի կողմից դիփարկվել է ավելի վաղ: Ներկա աշխափանքում ուսումնասիրվում են մյուս հնարավոր դեպքերը, երբ պայմաններից գոնե մեկը փրված է փեղափոխության համար: Վերջիններիս համար սփացված կրիփիկական ճիգերը մեծ են, քան առաջին դեպքում:

L. A. Movsisyan

About Stability of Anisotropic Cylindrical Shell

The problems for anisotropic cylindrical shell under axial compression are considered. Between four possible boundary conditions for tangential values, the case was considered before when conditions are related to forces. Here the other cases are studied when thought one condition is connected with displacement. The critical strengts for the last problems are greater than for the first one.

Литература

1. *Мовсисян Л.А.* - Изв. АН АрмССР. Физ.-мат. науки. 1962. Т. 15. N2. С. 111-120.
2. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. М. Наука. 1985. 512 с.
3. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М. Гостехиздат. 1957. 463 с.
4. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. М. ГИФМ литературы. 1963. 879 с.
5. *Мовсисян Л.А.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 34. N2. С. 5-12.