ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 108 2008 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

В.Ж. Думанян

Об ограниченности весового интеграла Дирихле решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка

(Представлено академиком А.Б. Нерсесяном 3/XII 2007)

Ключевые слова: *эллиптические уравнения, задача Дирихле, весовой интеграл Дирихле*

В работе рассматривается задача Дирихле в ограниченной области $Q \subset R_n$, $n \geq 2$, с гладкой границей ∂Q для общего эллиптического уравнения второго порядка

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(c_i(x)u)_{x_i}+d(x)u=f(x)-divF(x), \quad x\in Q; \quad (1)$$

$$u|_{\partial Q}=u_0, \quad (2)$$

с $u_0 \in L_2(\partial Q)$; функции f и $F=(f_1, \ldots, f_n)$ принадлежат $L_{2,loc}(Q)$, симметрическая матрица $A(x)=(a_{ij}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$\gamma_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j=(\xi, A(x)\xi)\leq\gamma_2|\xi|^2 \quad (3)$$

для всех $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)\in R_n$ и $x\in Q$ с положительными постоянными γ_1 и γ_2, а коэффициенты $b(x)=(b_1(x), \ldots, b_n(x))$, $c(x)=(c_1(x), \ldots, c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными в каждой строго внутренней подобласти области Q функциями.

Как и в работах [1-2], будем предполагать что единичный вектор внутренней нормали $\bar{\nu}$ к границе ∂Q удовлетворяет условию Дини

$$\left|\bar{\nu}(x) - \bar{\nu}(y)\right| \leq \omega(|x-y|) \tag{4}$$

для всех x и y из ∂Q, где ω — такая монотонная функция, что

$$\int_0 \frac{\omega(t)}{t}\, dt < \infty,$$

а коэффициенты a_{ij} непрерывны по Дини на границе

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x-y|) \tag{5}$$

для всех $x \in \partial Q$, $y \in Q$ и $i, j = 1, \ldots, n$. Не ограничивая общности, можно считать, что функция ω в условиях (4) и (5) одна и та же.

Целью настоящей работы является установление ограниченности интеграла Дирихле с весом $r(x)$ для решения u задачи (1),(2), т.е. интегрируемости по Q функции $r(x)|\nabla u(x)|^2$, где $r(x)$ — расстояние точки $x \in Q$ до границы ∂Q.

В случае уравнения с гладкими коэффициентами и области с ляпуновской границей это утверждение хорошо известно (см. [3-10]). При выполнении условий (3) — (5) для уравнения без младших членов ($b_i = 0, c_i = 0, d = 0$) с $f \in W_2^{-1}$ ($F = 0$) оно было установлено в [1]. Обобщение этого результата на более широкий класс правых частей было получено в работе [2]. В ней было показано, что результат остается справедливым, если

$$\begin{aligned} &r^{\frac{1}{2}}(x)\,(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}\,|F(x)| \in L_2(Q),\\ &r^{\frac{3}{2}}(x)\,(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}\,|f(x)| \in L_2(Q). \end{aligned} \tag{6}$$

При этом интегрируемость по Q функции $r(x)|\nabla u(x)|^2$ является не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы решение уравнения (1) являлось решением задачи Дирихле с некоторой граничной функцией $u_0 \in L_2(\partial Q)$ (см. [2, 4]). В случае уравнения с младшими членами (с ненулевыми коэффициентами $b(x)$ и $d(x)$, а $c(x) = 0$) интегрируемость по Q функции $r(x)|\nabla u(x)|^2$ была установлена в работах [11,12], при этом относительно коэффициентов $b(x)$ и $d(x)$ предполагалось выполнение следующих условий:

существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$|b(x)| \leq \frac{K}{r(x)(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}}, \quad x \in Q, \tag{7}$$

существует монотонная функция $D(t)$ такая, что

$$|d(x)| \le D(r(x)), \quad x \in Q \quad \text{и} \quad \int_0 t^3 |\ln t|^{\frac{3}{2}} D^2(t)\, dt < \infty. \tag{8}$$

Далее будем предполагать условия (6), (7) и (8) выполненными. В настоящей работе рассматривается задача Дирихле для общего уравнения. Относительно коэффициента $c(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$ предполагается выполнение следующего условия:

существует монотонная функция $C(t)$ такая, что

$$|c(x)| \le C(r(x)), \quad x \in Q \quad \text{и} \quad \int_0 t |\ln t|^{\frac{3}{2}} C^2(t)\, dt < \infty. \tag{9}$$

Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию u из $W^1_{2,\,loc}(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1) в смысле обобщенных функций, т.е. такую, что для всех $\eta \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_Q (A(x)\nabla u + c(x)u,\ \nabla\eta)\, dx + \int_Q ((b(x),\ \nabla u) + d(x)u)\,\eta\, dx = \int_Q (f\eta + (F,\ \nabla\eta))\ dx, \tag{10}$$

и удовлетворяющую условию (2) в следующем смысле: для каждой точки $x^0 \in \partial Q$ найдется такая ее окрестность $V_{x^0} \subset \partial Q$, что

$$\int_{V_{x^0}} \left(u(x + \delta\,\bar{\nu}\,(x^0)) - u_0(x)\right)^2 ds \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Как отмечалось, коэффициенты $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ — измеримые и в каждой строго внутренней подобласти ограниченные функции, а коэффициенты $a_{i\,j}(x)$ удовлетворяют условию (3). Тем самым постановка исследуемой задачи не требует условий гладкости коэффициентов уравнения и, следовательно, рассматриваемое в настоящей работе уравнение (1) общего вида не сводится к ранее изученному в [11,12] случаю при $c(x) = 0$.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть выполнены условия (3)-(9) и пусть u — решение из $W^1_{2,\,loc}$ задачи Дирихле (1), (2). Тогда функция $r(x)|\nabla u(x)|^2$ интегрируема по Q, т.е.*

$$\int_Q r(x)|\nabla u(x)|^2 dx < \infty.$$

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства леммы 1 работы [1]. Область Q представляется в виде объединения конечного числа "цилиндрообразных" областей. Далее, подставляя в интегральное тождество

(10) основную функцию η специального вида с носителем в соответствующей "цилиндрообразной" области и оценивая возникающие при этом интегралы, получаем требуемую оценку для каждой такой области.

Ереванский государственный университет

В.Ж. Думанян

Об ограниченности весового интеграла Дирихле решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка

В ограниченной области Q, $\partial Q \in C^1$, рассматривается задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка общего вида

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(c_i(x)u)_{x_i}+d(x)u=f(x)-divF(x),\quad x\in Q,$$

$$u|_{\partial Q}=u_0\in L_2(\partial Q).$$

Для решения установлена ограниченность интеграла Дирихле с весом $r(x)$, т.е. интегрируемость по Q функции $r(x)|\nabla u(x)|^2$, где $r(x)$ − расстояние точки $x\in Q$ до границы ∂Q.

Վ. Ժ. Դումանյան

Երկրորդ կարգի էլիպտական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծման Դիրիխլեի կշռային ինտեգրալի սահմանափակության մասին

Դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը երկրորդ կարգի ընդհանուր տեսքի գծային էլիպտական հավասարման համար Q, $\partial Q \in C^1$ սահմանափակ տիրույթում

$$-\sum_{i,j=}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(c_i(x)u)_{x_i}+d(x)u=f(x)-divF(x),\quad x\in Q,$$

$$u|_{\partial Q}=u_0\in L_2(\partial Q):$$

Լուծման համար ցույց է տրված $r(x)$ կշռով Դիրիխլեի ինտեգրալի սահմանափակությունը Q տիրույթով $r(x)|\nabla u(x)|^2$ ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը, որտեղ $r(x)$-ը $x\in Q$ կետի հեռավորությունն է ∂Q եզրից:

V. Zh. Dumanyan

On the Boundedness of Dirichlet's Weight Integral for Solution of the Dirichlet Problem for the Second Order Elliptic Equation

We consider the Dirichlet problem in a bounded domain Q, $\partial Q \in C^1$ for the general second order linear elliptic equation

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(c_i(x)u)_{x_i}+d(x)u=f(x)-\operatorname{div}F(x),\quad x\in Q,$$

$$u\big|_{\partial Q}=u_0\in L_2(\partial Q).$$

For the solution we prove boundedness of the Dirichlet integral with the weight $r(x)$, i.e. the function $r(x)|\nabla u(x)|^2$ is integrable over Q, where $r(x)$ is the distance from a point $x \in Q$ to the boundary ∂Q.

Литература

1. *Гущин А. К.* - Матем. сб. 1988. Т. 137(179). N1(9). С. 19-64.
2. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* - Матем. сб. 1991. Т. 182. N6. С. 737-810.
3. *Михайлов В. П.* - Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. N10. С. 1877-1891.
4. *Михайлов В. П.* - Матем. сб. 1976. Т. 101(143). N2(10). С. 163-188.
5. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М. Наука. 1983. 424 с.
6. *Петрушко И. М.* - Матем. сб. 1982. Т. 119(161). С. 48-77.
7. *Петрушко И. М.* - Матем. сб. 1983. Т. 120(162). С. 569-588.
8. *Михайлов В. П.* - Матем. заметки. 1980. Т. 27. N1. С. 137-145.
9. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* - Обобщенные функции и их применения в математической физике. Тр. Междунар. конф. Москва 24-28 ноября 1980. М. Вычислительный центр АН СССР. 1981. С. 189-205.
10. *Богоявленский О. И., Владимиров В. С., Волович И. В., Гущин А. К., Дрожжинов Ю. Н., Жаринов В. В., Михайлов В. П.* - Тр. МИАН. 1986. Т. 175. С. 63-102.
11. *Думанян В. Ж.* - ДАН РАН. 2002. Т. 386. N6. С. 735-737.
12. *Dumanyan V. Zh.* - Note Di Matematica. 2002/2003. V. 21. N2. P. 99-118.