ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

108 2008 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517

М. А. Галдунц, С. Г. Рафаелян

Об интерполяции и базисности некоторых систем целых функций

(Представлено академиком В.С. Захаряном 22/XI 2007)

Ключевые слова: *целые функции, функции типа синуса, интегральные представления, биортогональные системы*

Направляющим фактором при изучении нами вопросов интерполяции является известная теорема Котельникова [1].

Если последовательность $\{c_k\} \in \ell^2$, то ряд

$$f(z) = \sum_{\infty}^{+\infty} c_k \frac{\sin \pi(z-k)}{\pi(z-k)} \tag{1}$$

равномерно сходится на любом компакте, сходится по норме $L^2(R)$ на вещественной оси и дает линейное отображение всего пространства ℓ^2 на W_π, причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{\infty}^{+\infty} |c_k|^2. \tag{2}$$

Здесь через W_π обозначаем класс целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.г.) $\leqslant \pi$, интегрируемых в квадрате на вещественной оси.

Из равенства (1) следует, что $f(k) = c_k$.

В дальнейшем данная теорема была обобщена в различных направлениях Б. Я. Левиным [1, 2], его учениками, а также Пойа и Планшерелем [3].

М. М. Джрбашяном обобщенная теория преобразований Фурье в комплексной плоскости [4] позволила вышеприведенные интерполяционные задачи рассматривать и решать в более широких классах целых функций [5-7].

В настоящей работе исследованы аналогичные интерполяционные задачи в весовых классах целых функций многих переменных.

Пусть $1 < p < \infty$, $-1 < w_i < p-1$, $0 < \sigma_i < \infty$, $i = \overline{1,n}$. В дальнейшем мы всегда будем подразумевать под w — $(w_1, \ldots, w_n)$, σ — $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Обозначим через $W_\sigma^{p,w}(\mathbb{C}^n)$ пространство целых функций $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$ экспоненциального типа с нормой (ц.ф.э.т.)

$$\|f\|_{p,w}^p = \int\limits_{R^n} |f(x_1, \ldots, x_n)|^p \, |x_1|^{w_1} \cdots |x_n|^{w_n} dx_1 \cdots dx_n = \int\limits_{R^n} |f(x)|^p \, |x|^w dx < +\infty. \quad (3)$$

При $n = 1$ эти классы рассматривались в работах [5,6]. Оказывается, что пространство $W_\sigma^{p,w}(\mathbb{C}^n)$ является банаховым пространством с вышеуказанной нормой (3). Введем специальный класс $S_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}$ функций, являющихся естественным обобщением класса функций типа синуса в многомерном случае.

Следуя работе [5], обозначим через $S_\varkappa$ $(-\infty < \varkappa < +\infty)$ класс ц.ф.э.т. $< \sigma$ $S(z)$, удовлетворяющих следующему неравенству, при некоторых положительных константах c, C, K:

$$0 < c < \left|S(z) z^{-\varkappa}\right| e^{-\sigma|\operatorname{Im} z|} < C < \infty \quad (4)$$

при $|\operatorname{Im} z| > K$, $\inf\limits_{z_k \neq z_j} |z_k - z_j| > 0$, $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность нулей функции $S(z)$.

Обозначим через $S_\lambda(z) = S_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}(z) = S_{\lambda_1}(z_1) S_{\lambda_2}(z_2) \cdots S_{\lambda_n}(z_n)$ $(-\infty < \lambda_i < +\infty)$, где $S_{\lambda_i}(z_i) \in S_{\lambda_i}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $S(z) \in S_\lambda$, где $-\infty < \lambda_i < +\infty$, $\left\{z_i^k\right\}_0^\infty$ — последовательность корней соответствующих функций $S_i(z_i)$, расположенная в порядке неубывания модулей. Тогда*

1) для любого $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$, $\delta_i > 0$ существуют такие $m(\delta) > 0$, $M(\delta) > 0$, что вне δ-окрестности множества корней, т.е. на множестве $\prod\limits_k \left\{z;\ |z - z^k| \geqslant \delta\right\}$, где $z^k = \left\{z_1^k, z_2^k, \ldots, z_n^k\right\}$, имеют место неравенства

$$\begin{gathered} m(\delta)\left(1+|z_1|\right)^{\lambda_1} \cdots \left(1+|z_n|\right)^{\lambda_n} e^{\sigma_1|y_1|} \cdots e^{\sigma_n|y_n|} \leqslant |S(z)| \leqslant \\ \leqslant M(\delta)\left(1+|z_1|\right)^{\lambda_1} \cdots \left(1+|z_n|\right)^{\lambda_n} e^{\sigma_1|y_1|} \cdots e^{\sigma_n|y_n|}; \end{gathered} \quad (5)$$

2) если p_i^k — кратность появления z_i^k во всей последовательности $\left\{z_i^k\right\}_0^\infty$, $i = \overline{1,n}$, то

$$\left|\frac{\partial^{p_1^k + \cdots + p_n^k} S(z^k)}{\partial^{p_1^k} z_1 \partial^{p_2^k} z_2 \cdots \partial^{p_n^k} z_n}\right| \geqslant C\left(1 + |z_1^k|\right)^{\lambda_1} \cdots \left(1 + |z_n^k|\right)^{\lambda_n}; \quad (6)$$

3) при некоторых положительных константах c, C, K (зависящих от функций $S(z)$), выполняются равенства

$$0 < c < \left|S(z)z_1^{-\lambda_1}\cdots z_n^{-\lambda_n}\right| e^{-\sigma_1|\mathrm{Im} z_1|}\cdots e^{-\sigma_n|\mathrm{Im} z_n|} < C < +\infty, \tag{7}$$

когда $|\mathrm{Im} z_i| > K_i$, $i = \overline{1,n}$ *и* $\inf\left|z_i^k - z_i^j\right| > 0$.

Доказательство всех трех пунктов выводится непосредственно из аналогичных свойств соответствующих составляющих функций $S(z)$, указанных в работе [5].

В частном одномерном случае при $\varkappa = 0$ класс $S\varkappa$ является подклассом S_0 функций типа синуса, которые не имеют кратных нулей, впервые введенных Б. Я. Левиным [2].

Как уже отмечалось выше, цель нашей работы — решить интерполяционную задачу в весовых классах целых функций многих переменных $W_\sigma^{p,w}(\mathbb{C}^n)$ с нормой (3). Решить интерполяционную задачу в классе $W_\sigma^{p,w}(\mathbb{C}^n)$ означает найти функцию $f(z)$ данного класса, удовлетворяющую интерполяционным условиям при соответствующих интерполяционных узлах.

Пусть функция $S(z) \in S_\lambda$ и $z = \{z_k\}_0^\infty$ — последовательность ее корней. Согласно обозначениям, введенным в работах [5,6], обозначим через $s_k \geqslant 1$ и p_k кратность появления числа z_k на отрезке $\{z_j\}_0^k$ и во всей последовательности $\{z_j\}_0^\infty$ соответственно. Введем в рассмотрение полиномы

$$g_k(z) = \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} a_\nu(z_k)(z - z_k)^\nu \qquad \left(k = \overline{0,\infty}\right), \tag{8}$$

где $a_\nu(z_k) = \dfrac{1}{\nu!}\left(\dfrac{(z - z_k)^{p_k}}{s(z)}\right)_{z=z_k}$, а также функции

$$\Omega_k(z) = \frac{s(z)g_k(z)}{(s_k - 1)!\,(z - z_k)^{p_k - s_k + 1}} = \frac{s(z)}{(s_k - 1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k - s_k}\frac{a_\nu(z_k)}{(z - z_k)^{p_k - s_k - \nu + 1}}, \tag{9}$$

$\Omega_k(z)$ — целая функция и в частном случае, когда все нули $s(z)$ простые, $s_k = p_k = 1$ и из (9) следует, что

$$\Omega_k(z) = \frac{s(z)}{s'(z_k)(z - z_k)}.$$

Далее введем в рассмотрение функции $S_i(z_i) \in S_{\lambda_i}$, $i = \overline{1,n}$, $\left\{z_i^k\right\}_0^\infty$, p_i^k и s_i^k — последовательности соответствующих корней и кратностей. Теперь через $S(z) = S(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ обозначим следующее произведение $S(z) = S(z_1)S_2(z_2)\cdots S_n(z_n)$. Эта функция от n переменных, которая принадлежит вышеупомянутому классу $S_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$, и, в частности, целая экспоненциального типа по каждому переменному и соответствующий тип $\leqslant \sigma_i$, $i = \overline{1,n}$. Для каждого $S_i(z_i)$ построим соответствующие функции $\Omega_i(z_i)$, основываясь на одномерном случае (9)

$$\Omega_i^k(z_i) = \frac{s_i(z_i)g_i(z_i)}{(s_i^k-1)!\,(z_i-z_i^k)^{p_i^k-s_i^k+1}} = \frac{s_i(z_i)}{(s_i^k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_i^k-s_i^k}\frac{a_i^\nu\,(z_i^k)}{(z_i-z_i^k)^{p_i^k-s_i^k-\nu+1}}. \qquad (10)$$

Так как каждая функция $s_i(z_i)$ целая и имеет нуль кратности p_i^k в точке $z_i = z_i^k$, то $\Omega_i^k(z_i)$ — также целая функция. Через $\Omega^\varkappa(z) = \Omega(z_1, z_2, \dots, z_n)$ обозначим соответственно функцию от n комплексных переменных следующим образом:

$$\Omega^\varkappa(z) = \Omega_1^{i_1}(z_1)\Omega_2^{i_2}(z_2)\cdots\Omega_n^{i_n}(z_n) = \prod_{i=1}^{n}\Omega_i^\varkappa(z_i), \qquad (11)$$

где $\varkappa := (i_1, i_2, \dots, i_n)$, $i_j = \overline{0,\infty}$.

Опираясь на одномерный случай, доказываются утверждения:

а) Пусть $S(z) \in S_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}$ и $p\lambda_i + w_i < p-1$. Тогда $\Omega^\varkappa(z) \in W_\sigma^{p,w}$.

б) Функции системы $\{\Omega^\varkappa(z)\}_{\varkappa\in\mathbb{R}_+^n}$ удовлетворяют следующим интерполяционным данным:

$$\left.\frac{\partial^{s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\dots+s_n^{i_n}-1}\Omega^\varkappa}{\partial^{s_1^{i_1}-1}z_1\partial^{s_2^{i_2}-1}z_2\cdots\partial^{s_n^{i_n}-1}z_n}\right|_{(z_1^{j_1},z_2^{j_2},\dots,z_n^{j_n})} = \delta_{\varkappa,\varkappa_j} = \begin{cases}1, & \varkappa = \varkappa_j,\\ 0, & \varkappa \ne \varkappa_j.\end{cases} \qquad (12)$$

Рссмотрим ряды по функциям системы $\{\Omega^\varkappa(z)\}_{\varkappa\in\mathbb{R}_+^n}$, иначе говоря, ряды вида

$$f(z) = \sum_{\varkappa\in\mathbb{R}_+^n} c_\varkappa\Omega^\varkappa(z), \qquad (13)$$

где $\{c_\varkappa\}_{\varkappa\in\mathbb{R}_+^n}$ — некоторая последовательность комплексных чисел. Нас интересует вопрос: когда этот ряд определяет функцию из класса $W_\sigma^{p,w}$?

Пусть $\{z_i^k\}_0^\infty$, $i = \overline{1,n}$, последовательность нулей функции $S(z) \in S_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}$. Обозначим через $\ell_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}^{p,w_1,\dots,w_n} \equiv \ell_\lambda^{p,w}$ $(1 < p < \infty,\ -1 < w < p-1)$ класс последовательностей комплексных чисел $\{c_\varkappa\}_{\varkappa\in\mathbb{R}_+^n}$, удовлетворяющих условию

$$\|\{c_\varkappa\}\|_{\ell_\lambda^{p,w}} = \left\{\sum_{\varkappa\in\mathbb{R}_+^n}|c_\varkappa|^p(1+|z_1|)^{w_1}\dots(1+|z_n|)^{w_n}\right\}^{1/p} < +\infty. \qquad (14)$$

Очевидно, что $\ell_\lambda^{p,w}$ с данной нормой является банаховым пространством.

Теорема 2. *Пусть $\{z_i^k\}_0^\infty$, $i = \overline{1,n}$, последовательность всех нулей функции $S(z) \in S_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}$ и $w_i + p\lambda_i \in (-1, p-1)$. Тогда*

1) для любого элемента $\{a_\varkappa\} \in \ell_\lambda^{p,w}$ ряд

$$f(z) = \sum_{\varkappa\in\mathbb{R}_+^n} c_\varkappa\Omega^\varkappa(z)$$

сходится по норме пространства $W_\sigma^{p,w}$ и определяет функцию $f(z)$ из класса $W_\sigma^{p,w}$, удовлетворяющую интерполяционным условиям

$$\left.\frac{\partial^{s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\cdots+s_n^{i_n}-1} f}{\partial^{s_1^{i_1}-1} z_1 \partial^{s_2^{i_2}-1} z_2 \cdots \partial^{s_n^{i_n}-1} z_n}\right|_{\left(z_1^{i_1}, z_2^{i_2}, \ldots, z_n^{i_n}\right)} = c_\varkappa = c_{i_1,\ldots,i_n}; \tag{15}$$

2) кроме того справедливы неравенства

$$\|f\|_{p,w} \asymp \|\{a_\varkappa\}\|_{\ell_\lambda^{p,w}} \tag{15'}$$

(символ $\asymp$ означает, что отношение величин, стоящих в правой и левой частях, заключено между двумя положительными постоянными).

Справедлива и обратная теорема.

Объединив эти результаты, мы приходим к следующей общей теореме.

Теорема 3. *Пусть $\left\{z_i^k\right\}_0^\infty$, $i = \overline{1,n}$ — нули функции $S(z) \in S_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$, где $w_i + p\lambda_i \in (-1, p-1)$. Тогда ряд* (13) *осуществляет линейное топологическое отображение всего пространства $\ell_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}^{p,w_1,\ldots,w_n}$ на пространство $W_\sigma^{p,w}(\mathbb{C}^n)$, причем справедливы условия* (15) *и неравенства* (15′).

Отметим, что в специальном случае, когда $w = 0$, $\lambda = 0$, ряд (3) преобразуется в ряд

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\alpha \frac{\sin\pi\left(z_1 - m_{i_1}\right)}{\pi\left(z_1 - m_{i_1}\right)} \cdots \frac{\sin\pi\left(z_n - m_{i_n}\right)}{\pi\left(z_n - m_{i_n}\right)},$$

который рассматривался в работе Пойа и Планшереля [3]. Когда $w = 0$, $n = 1$, $\lambda = 0$ имеем, в частном случае, теорему Б. Я. Левина [2]. И наконец, при $n = 1$ получаем теорему, выведенную в [6]. Частным случаем теоремы Пойа — Планшереля при $n = 1$ является теорема Котельникова [3].

В дальнейших исследованиях получен ряд новых результатов о базисности систем функций типа Миттаг-Леффлера (в двумерном случае), ассоциированных с последовательностями нулей целых функций определенного класса (обобщающего класса целых функций типа синуса в двумерном случае). Основой для этого послужили замечательные асимптотические свойства целой функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \qquad (\rho > 0,\ -\infty < \mu < +\infty)$$

порядка ρ и типа $\sigma = 1$.

Эти результаты в одномерном случае являются дискретными аналогами интегральных преобразований М. М. Джрбашяна с ядрами $E_1(z;\mu)$.

Пусть $p = 2$, $1 < w_i < p - 1$, $0 < \sigma_i < \infty$, $i = 1, 2$. Для класса функций $W_\sigma^{2,w}(\mathbb{C}^2)$ установлена следующая теорема о параметрическом представлении, которая в специальном случае, при $n = 1$, содержит в себе теорему, установленную М. М. Джрбашяном.

Теорема 4. *Класс* $W^{2,\omega_1,\omega_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$, *$(-1 < \omega_i < 1, \sigma_i > 0, i = 1,2)$ совпадает с классом функций, допускающих представление следующего вида:*

$$f(z_1, z_2) = \int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int\limits_{-\sigma_2}^{\sigma_2} E_1(i\tau_1 z_1; \mu_1) E_1(i\tau_2 z_2; \mu_2) \varphi^*(\tau_1, \tau_2) |\tau_1|^{\mu_1 - 1} |\tau_2|^{\mu_2 - 1} d\tau_1\, d\tau_2, \qquad (16)$$

где $\mu_i = 1 + \dfrac{\omega_i}{2}$, $i = 1, 2$, $\varphi^*(\tau_1, \tau_2) \in L_2(D)$, *где* $D = \{(-\sigma_1, \sigma_1) \times (-\sigma_2, \sigma_2)\}$.

С использованием метода М. М. Джрбашяна построения биортогональных систем [7] и результатов работ [8], связанных с базисностью систем функций типа Миттаг-Лефлера в соответствующих пространствах $W^{2,\omega}_{\sigma}$ выведены аналогичные результаты в пространствах $W^{2,\omega_1,\omega_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$. Рассмотрим функции $s_i(z_i) \in S_{\lambda_i}$, $i = 1, 2$, $\{z_i^k\}_0^\infty$ — последовательности соответствующих корней, $s_i^k \geqslant 1$, p_i^k — кратности появления элемента z_i^k соответственно на отрезке $\{z_i^j\}_0^k$ и во всей последовательности $\{z_i^j\}_0^\infty$. Пусть $\sigma_i > 0$, $-1 < \omega_i < 1$, $i = 1, 2$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Система функций*

$$\left\{ E_1^{(s_1^\ell - 1)} \left(i\tau_1 z_1^\ell; \mu_1\right) (i\tau_1)^{(s_1^\ell - 1)} E_1^{(s_2^p - 1)} \left(i\tau_2 z_2^p; \mu_2\right) (i\tau_2)^{(s_2^p - 1)} \times |\tau_1|^{\mu_1 - 1} |\tau_2|^{\mu_2 - 1} \right\}_{(\ell, p)}, \qquad (17)$$

где $\mu_i = 1 + \dfrac{\omega_i}{2}$, $-1 < \omega_i + 2\lambda_i < 1$, *является базисом Рисса в пространстве* $L^2(D)$, *т.е. любая функция* $f(x_1, x_2) \in L^2(D)$ *единственным образом разлагается в ряд*

$$f(x_1, x_2) = \sum_{(\ell, p)} G_{(\ell, p)}(f) c_{(\ell, p)}(x_1, x_2), \qquad (18)$$

сходящийся по норме пространства $L^2(D)$, *где* $c_{(\ell,p)}(f)$ *коэффициенты определяются следующим образом:*

$$c_{(\ell, p)}(f) = \int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int\limits_{-\sigma_2}^{\sigma_2} f(x_1, x_2)\, \varphi^*_{\ell, p}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \qquad (19)$$

и

$$\|f\|_{L_2(D)} \asymp \left\| \left\{ c_{(\ell, p)} \right\} \right\|_{\ell^2}. \qquad (20)$$

Рассмотрим несколько специальных случаев этой теоремы, которые представляют особый интерес.

1. При $s_1^\ell = 1$, $s_2^p = 1$ и $\mu_1 = \mu_2 = 1$ система функций $\left\{ e^{i\tau_1 z_1^\ell} e^{i\tau_2 z_2^p} \right\}_{\ell, p}$ образует базис Рисса в $L_2(D)$.

2. При $s_1^\ell = 1$, $s_2^p = 1$ и $\mu_1 = 1$, $\mu_2 \neq 1$ система функций

$\left\{e^{i\tau_1 z_1^\ell} E_1\left(i\tau_2 z_2^p;\mu_2\right)|\tau_2|^{\mu_2-1}\right\}_{\ell,p}$ образует базис Рисса в $L_2(D)$.

3. При $s_1^\ell = 1$, $s_2^p = 1$ и $\mu_1 \neq 1$, $\mu_2 \neq 1$ система функций $\left\{E_1\left(i\tau_1 z_1^\ell;\mu_1\right)|\tau_1|^{\mu_1-1} E_1\left(i\tau_2 z_2^p;\mu_2\right)|\tau_2|^{\mu_2-1}\right\}_{\ell,p}$ образует базис Рисса в $L_2(D)$.

Введем в рассмотрение функции $s_1(z_1,\nu_1)$ и $s_2(z_2,\nu_2)$:

$$s_1(z_1,\nu_1) = E_1(i\sigma_1 z_1;\nu_1) - E_1(-i\sigma_1 z_1;\nu_1), \quad 0<\nu_1<2, \ s_1(z_1,\nu_1)\in S_{(1-\nu_1)}, \tag{21}$$

$$s_2(z_2,\nu_2) = E_1(i\sigma_2 z_2;\nu_2) - E_1(-i\sigma_2 z_2;\nu_2), \quad 0<\nu_2<2, \ s_2(z_2,\nu_2)\in S_{(1-\nu_2)}. \tag{22}$$

С другой стороны исходя из (21) и (22) имеем

$$s_1(z_1,\nu_1) = 2iz_1 E_{1/2}\left(-\sigma_1^2 z_1^2; 1+\nu_1\right), \tag{23}$$

$$s_2(z_2,\nu_2) = 2iz_2 E_{1/2}\left(-\sigma_2^2 z_2^2; 1+\nu_2\right). \tag{24}$$

Как известно, все нули функции $E_{1/2}(z;\mu)$ при $1 \leqslant \mu \leqslant 3$ простые и вещественные [7]. Отсюда и из (23), (24) вытекает, что все нули функции $s_1(z_1,\nu_1)$ и $s_2(z_2,\nu_2)$ при $1\leqslant \nu_1 < 2$, $i=1,2$ также простые и вещественные.

Рассмотрим системы вида

$$\left\{E_1\left(i\tau_1 z_1^\ell;\mu_1\right)|\tau_1|^{\mu_1-1} E_1\left(i\tau_2 z_2^p;\mu_2\right)|\tau_2|^{\mu_2-1}\right\}_{\ell,p} \equiv \left\{e_{\mu_1}\left(\tau_1; iz_1^\ell\right) e_{\mu_2}\left(\tau_2; iz_2^p\right)\right\}_{(\ell,p)}. \tag{25}$$

Теперь, используя метод М. М. Джрбашяна, определим систему, биортогональную системе (25).

Теорема 6. *Системы функций* $\left\{E_1\left(iz_1^{k_1}x_1;\mu_1\right)|x_1|^{\mu_1-1}\times E_1\left(iz_2^{k_2}x_2;\mu_2\right)|x_2|^{\mu_2-1}\right\}_{(k_1,k_2)}$ *и* $\left\{\dfrac{e_{\beta_1}\left((\sigma_1-|x_1|)sgn\,x_1; iz_1^{k_1}\right)\times e_{\beta_2}\left((\sigma_2-|x_2|)sgn\,x_2; iz_2^{k_2}\right)}{\sigma_1^{\nu_1-1}\sigma_2^{\nu_2-1}s_1'\left(z_1^{k_1};\nu_1\right)\times s_2'\left(z_2^{k_2};\nu_2\right)}\right\}_{(k_1,k_2)}$ *биортогональны на D, где $\beta_{1,2} = 1+\nu_{1,2}-\mu_{1,2}$.*

В случае $\mu_{1,2}=1$ $(\beta_{1,2}=\nu_{1,2})$ система функций $\{e_\mu(x;iz_k)\}_0^\infty$ переходит в систему $\{e^{iz_k x}\}_0^\infty$ и получаем следующее.

Теорема 7. *Системы функций* $\left\{e^{iz_1^{k_1}x_1}e^{iz_2^{k_2}x_2}\right\}_{(k_1,k_2)}$ *и*

$$\left\{\frac{e_{\beta_1}\left((\sigma_1-|x_1|)sgn\,x_1; iz_1^{k_1}\right) e_{\beta_2}\left((\sigma_2-|x_2|)sgn\,x_2; iz_2^{k_2}\right)}{\sigma_1^{\nu_1-1}\sigma_2^{\nu_2-1}s_1'\left(z_1^{k_1};\nu_1\right)\times s_2'\left(z_2^{k_2};\nu_2\right)}\right\}_{(k_1,k_2)},$$

которые образуют базис Рисса (после нормировки) в $L^2(D)$, биортогональны на D.

Ереванский государственный университет

М. А. Галдунц, С. Г. Рафаелян

Об интерполяции и базисности некоторых систем целых функций

Рассматриваются задачи интерполяции и базисности в банаховых пространствах целых функций многих переменных. Доказано, что ряды

$$f(z) = \sum_{\varkappa \in \mathbb{R}_n^+}^{\varkappa(i_1,\dots,i_n)} \frac{\partial^{\left(s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\cdots+s_n^{i_n}-1\right)} f\left(z_1^{i_1},\dots,z_n^{i_n}\right)}{\partial^{s_1^{i_1}-1} z_1 \partial^{s_2^{i_2}-1} z_2 \cdots \partial^{s_n^{i_n}-1} z_n} \Omega^{\varkappa}(z)$$

являются решением данной задачи.

Исходя из данных результатов, а также теорем типа Винера – Пели изучается базисность систем функций специального типа в классе $L^2(D)$ (D – прямоугольник).

Մ. Ա. Գալդունց, Ս. Գ. Ռաֆայելյան

Ինտերպոլյացիան և բազիսությունը ամբողջ ֆունկցիաների որոշ համակարգերում

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում են բազմակի ինտերպոլյացիայի և բազիսության խնդիրները շատ փոփոխականների ամբողջ ֆունկցիաների բանախյան տարածություններում: Ապացուցվում է, որ այդ խնդրի լուծումները հետևյալ շարքերն են.

$$f(z) = \sum_{\varkappa \in \mathbb{R}_n^+}^{\varkappa(i_1,\dots,i_n)} \frac{\partial^{\left(s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\cdots+s_n^{i_n}-1\right)} f\left(z_1^{i_1},\dots,z_n^{i_n}\right)}{\partial^{s_1^{i_1}-1} z_1 \partial^{s_2^{i_2}-1} z_2 \cdots \partial^{s_n^{i_n}-1} z_n} \Omega^{\varkappa}(z):$$

Հենվելով այս արդյունքների վրա, ինչպես նաև օգտվելով Վիներ-Պելիի տիպի թեորեմնե-րից, հետազոտվում է նաև հատուկ տեսքի ֆունկցիաների համակարգերի բազիսությունը $L^2(D)$ (D - ուղղանկյուն է) դասում:

M. A. Galdunts, S. G. Rafaelyan

Interpolation and Basis of Some Systems of Entire Functions

The present work deals with multiple interpolation and basis problems in some spaces of entire functions. It is shown that the problem solutions are given by the series of the form

$$f(z) = \sum_{\varkappa \in \mathbb{R}_n^+}^{\varkappa(i_1,\dots,i_n)} \frac{\partial^{\left(s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\cdots+s_n^{i_n}-1\right)} f\left(z_1^{i_1},\dots,z_n^{i_n}\right)}{\partial^{s_1^{i_1}-1} z_1 \partial^{s_2^{i_2}-1} z_2 \cdots \partial^{s_n^{i_n}-1} z_n} \Omega^{\varkappa}(z).$$

Using this, and the Wiener–Paley theorems, the basis property of some special type function systems are investigated in the class $L^2(D)$, where D is a rectangle.

Литература

1. *Левин Б. Я.* Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа. 1969.

2. *Левин Б. Я., Любарский Ю. И.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент. 1975.

3. *Plancherel N., Polya G.* Fonctions entieres et integrales de Fourier multiples. (Seconde partie). Zurich, 1937.

4. *Djrbashian M. M.* Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain. 1993.

5. *Рафаелян С. Г.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1983. Т. 18. N3. С. 167-186.

6. *Джрбашян М. М., Рафаелян С. Г.* - ДАН АрмССР. 1981. Т. 72. N4.

7. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966.

8. *Рафаелян С. Г.* - Изв. АН АрмССР. 1984. Т. 19. N3. С. 207-217.