

МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

Ж. Г. Маргарян, А. Р. Манукян

Количество треугольников в графе по последовательности рёбер

(Представлено академиком Ю. Г. Шукурзяном 23/X 2007)

**Ключевые слова:** граф, вершина, ребро, достижимая оценка, компонента связности

Пусть  $G = (V, E)$  — обыкновенный граф [1], где  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  — множество вершин, а  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  — множество рёбер. Говоря "обыкновенный граф", мы понимаем неориентированный граф, в котором нет петель и кратных рёбер.

Рассмотрим последовательность рёбер графа  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$ , где  $\{i_1, \dots, i_m\}$  любая перестановка чисел  $\{1, \dots, m\}$ .

**Определение.** Ребро  $e_{i_p}$  образует треугольник для данной последовательности рёбер  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$ , если рёбра  $e_{i_p}$  и  $e_{i_{p-1}}$  имеют общую вершину и если при  $e_{i_p} = (x, y)$ ,  $e_{i_{p-1}} = (z, x)$  ребро  $(z, y) \in E$  встречается в последовательности  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$  перед  $e_{i_p}$ .

**Пример 1.**

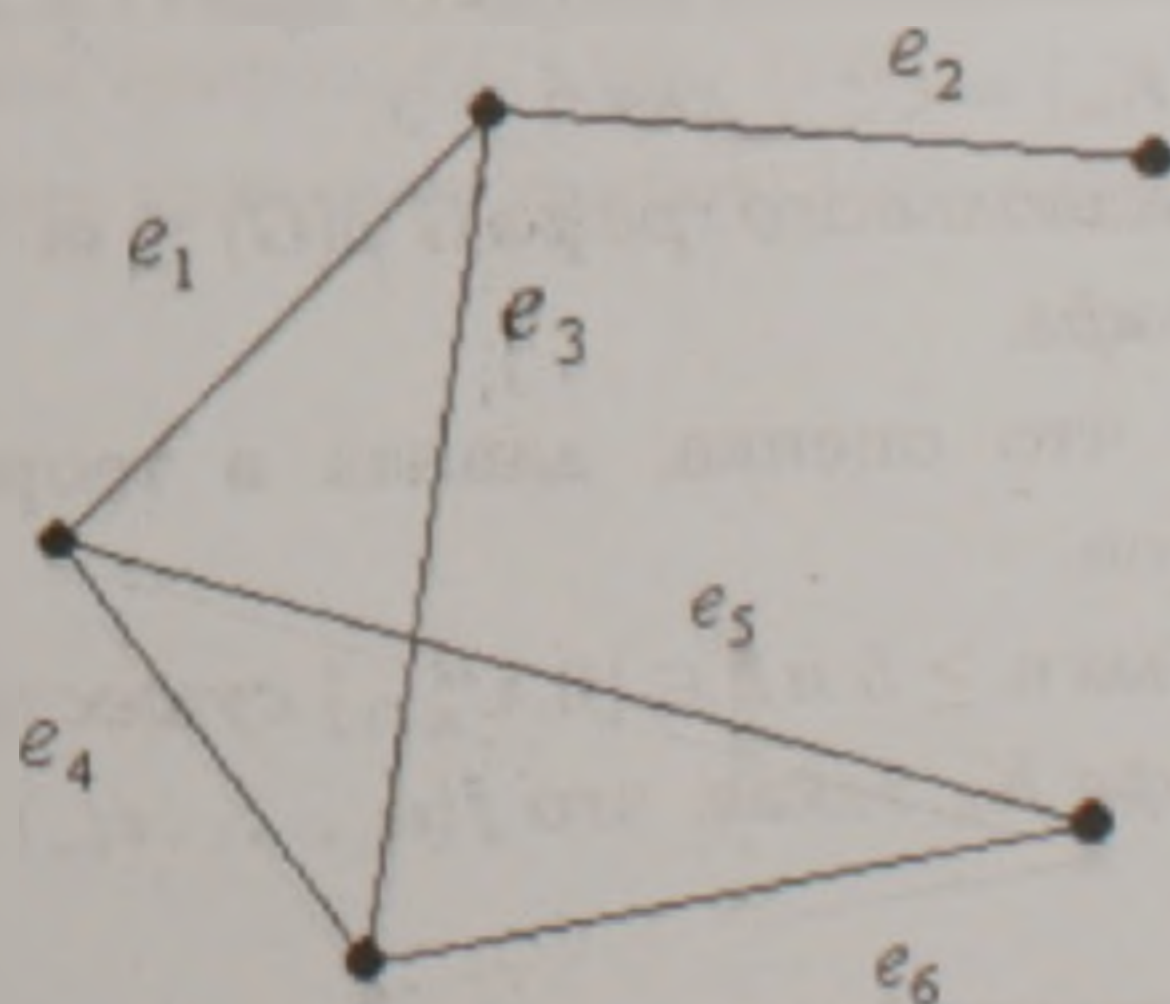


Рис. 1

На рис. 1 изображён граф, в котором ребро  $e_3$  образует треугольник для последовательности рёбер  $\{e_1, e_4, e_3, e_5, e_2, e_6\}$ . При последовательности  $\{e_1, e_4, e_5, e_3, e_2, e_6\}$  рёбер, образующих треугольник, нет.

Обозначим через  $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})$  количество рёбер, образующих треугольники для данной последовательности рёбер  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$ .

### Пример 2.

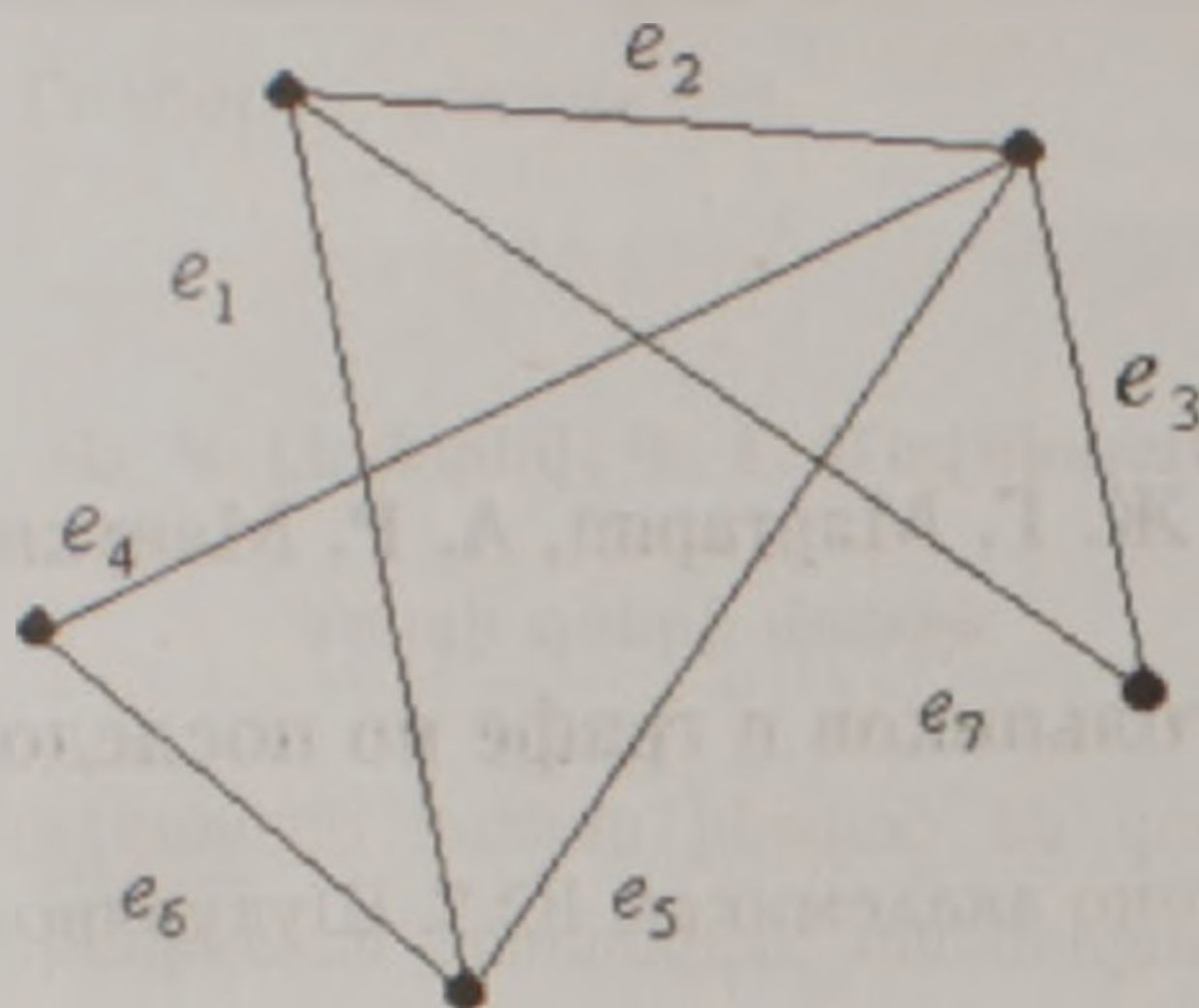


Рис. 2

Для последовательности рёбер  $\{e_4, e_5, e_6, e_2, e_3, e_1, e_7\}$ , показанной на рис. 2,  $f(e_4, e_5, e_6, e_2, e_3, e_1, e_7) = 1$ , а для последовательности  $\{e_2, e_3, e_7, e_4, e_5, e_6, e_1\}$   $f(e_2, e_3, e_7, e_4, e_5, e_6, e_1) = 2$ . Последовательности рёбер  $\{e_2, e_4, e_5, e_3, e_6, e_7, e_1\}$  соответствует  $f(e_2, e_4, e_5, e_3, e_6, e_7, e_1) = 0$ .

Введём следующие функции для графа  $G$ :

$$\varphi(G) = \max_{(i_1, \dots, i_m) \in S_m} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}),$$

$$\psi(G) = \min_{(i_1, \dots, i_m) \in S_m} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}),$$

где  $S_m$  — множество всех перестановок чисел.

Обозначим через  $K_n$  полный граф, имеющий  $n$  вершин.

**Утверждение 1.**  $\psi(K_3) = 1$ ,  $\psi(K_4) = 1$ .

**Теорема 1.** Для произвольного графа  $G$  при  $G \neq K_3$  и  $G \neq K_4$   $\psi(G) = 0$ .

**Утверждение 2.**  $\varphi(K_n) = C_{n-1}^2$  для  $n \geq 3$ .

**Теорема 2.** Для произвольного графа  $G$   $\varphi(G) \leq m - n + k$ , где  $k$  — количество компонент связности графа.

Следует отметить, что оценка, данная в теореме 2, достижима для деревьев и полных графов.

**Теорема 3.** Для любых  $n \geq 5$  и  $k \in [0, C_{n-1}^2]$  существует последовательность рёбер  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$  в графе  $K_n$  такая, что  $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) = k$ .

Ереванский государственный университет

**Ж. Г. Маргарян, А. Р. Манукян**

### **Количество треугольников в графе по последовательности рёбер**

По всем последовательностям рёбер определено минимальное и максимальное количество образующих треугольников для графа. Для любого графа найдено минимальное количество образующих треугольников, а для максимального значения приведена достижимая верхняя оценка.

**Ջ. Գ. Մարգարյան, Ա. Ն. Մանուկյան**

### **Գրաֆի՝ եռանկյուն առաջացնող կողերի քանակը ըստ փրված հաջորդականության**

Գրաֆի համար սահմանված են առաջացող եռանկյունների քանակի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները՝ ըստ կողերի բոլոր հաջորդականությունների: Կամայական գրաֆի համար գտնված է առաջացող եռանկյունների քանակի փոքրագույն արժեքը, իսկ մեծագույն արժեքի համար բերված է հասանելի վերին գնահատական:

**Zh. G. Margaryan, A. R. Manukyan**

### **The Quantity of the Graph Triangles Due to the Sequence of Edges**

We have defined the maximum and minimum values of the quantity of the forming triangles due to all the sequences of the edges. The minimal value of the quantity of the forming triangles for every graph has been found. And the possible attainable upper limit of the maximum value has been proposed.

### **Литература**

1. Харари Ф. Теория графов. М. Мир. 1973.
2. Зыков А.А. Теория конечных графов. Новосибирск. Наука. 1969.