ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 108 2008 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.22

А. Я. Саакян

Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения $2n$-порядка вне круга

(Представлено чл.-кор. НАН РА Н.Е.Товмасяном 21/X 2007)

Ключевые слова: *правильно эллиптическое уравнение, аналитические функции, общее решение, характеристическое уравнение*

1. Постановка задачи и основные результаты. Пусть $D = \{(x,y), x^2+y^2 > 1\}$, $\overline{D} = \{(x,y), x^2+y^2 \leq 1\}$, $\Gamma-$окружность $x^2+y^2=1$. Будем предполагать, что бесконечно удаленная точка не принадлежит ни D и ни $\overline{D}$. В дальнейшем комплексное число $z = x+iy$ отождествим с точкой (x,y). В области D рассмотрим правильно эллиптическое уравнение $2n$-го порядка

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k \frac{\partial^{2n} u(x,y)}{\partial x^k \partial y^{2n-k}} = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{1}$$

где A_j $(j = 0,1,\dots,2n)-$комплексные постоянные, $A_0 \neq 0$. Уравнение (1) называется правильно эллиптическим, если среди корней характеристического уравнения

$$A_0\lambda^{2n} + A_1\lambda^{2n-1} + \ldots + A_n = 0 \tag{2}$$

нет действительных и числа корней с $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $\operatorname{Im}\lambda < 0$ равны. Корни считаем столько раз, какова их кратность. Граничные условия Дирихле берем в виде

$$\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial r^k} = f_k(x,y), \ (x,y) \in \Gamma, \ k = 0,1,\dots,n-1, \tag{3}$$

где $\dfrac{\partial^k}{\partial r^k}-k$-я производная по внешней нормали к Γ в точке $(x,y) \in \Gamma$, а $f_k(x,y)-$ заданные бесконечно дифференцируемые функции на Γ. Будем предполагать, что решение $u(x,y)$ — бесконечно дифференцируемое в $\overline{D}$ и в окрестности бесконечности удовлетворяет условию

$$|u(x,y)| \le C|z|^{n-1}, \tag{4}$$

где C — постоянная, зависящая от u.

Задачу (1)-(3) при $f_k \equiv 0$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ будем называть однородной.

В [1,2] доказаны существование и единственность решения задач (1), (3)-(4) в частном случае и указан эффективный метод их решения. В предлагаемой работе рассматривается задача (1), (3)-(4) в общем случае.

В работе доказана следующая основная теорема.

Теорема 1. *Задача (1), (3)-(4) имеет единственное решение.*

Указывается также эффективный метод решения задачи (1)-(3), без использования сингулярных интегральных уравнений.

2. Общее решение уравнения. Для решения задачи (1), (3)-(4) основную роль играет представление общего решения уравнения (1), удовлетворяющее условию (4). Такие представления в конечных односвязных областях приведены в [3]. В случае, когда корни характеристического уравнения (2) простые, вне круга представление общего решения уравнения (1) приведено в [1], а для n-гармонического уравнения — в [2]. В общем случае оно приведено в [4]. Доказательство проведем для случая $2n = 6$. В общем случае доказательство аналогично. Используем представление, приведеное в [4] для случая, когда $2n = 6$, а характеристическое уравнение (2) имеет три различных корня λ_1, λ_2 и λ_3 с кратностями 3, 2 и 1 соответственно, причем $\operatorname{Im}\lambda_1 > 0$, $\operatorname{Im}\lambda_2 < 0$, $\operatorname{Im}\lambda_3 < 0$.

Это общее решение мы используем для иследования задачи (1), (3)-(4) и доказательства теоремы 1.

В сделанных предположениях относительно уравнения (1) общее решение этого уравнения, удовлетворяющее условию (4), имеет вид [4]

$$\begin{gathered} u(x,y) = \Phi_{10}(x+\lambda_1 y) + y\Phi_{11}(x+\lambda_1 y) + y^2\Phi_{12}(x+\lambda_1 y) + \Phi_{20}(x+\lambda_2 y) + \\ + y\Phi_{21}(x+\lambda_2 y) + \Phi_{30}(x+\lambda_3 y) + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00}, \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\Phi_{j0}(x+\lambda_j y) = \varphi_{j0}(x+\lambda_j y) + (b_{j0} + c_{j0}(x+\lambda_j y))\ln(x+\lambda_j y), \quad j = 1,2,3, \tag{6}$$

$$\Phi_{j1}(x+\lambda_j y) = \varphi_{j1}(x+\lambda_j y) + b_{j1}\ln(x+\lambda_j y),\ \Phi_{j2}(x+\lambda_1 y) = \varphi_{12}(x+\lambda_1 y),\ j = 1,2, \tag{7}$$

$\varphi_{jk}(x+\lambda_j y)$ — произвольные аналитические функции своих аргументов при $(x,y) \in D$ и $\varphi_{jk}(\infty) = 0$; a_{jk} $(0 \le j+k \le 2)$ произвольные постоянные, а b_{j0}, c_{j0} $(j = 1,2,3)$, d_{11}, d_{21} некоторые постоянные.

В (6) и (7) под $\ln(x + \lambda_j y)$ $(j = 1,2,3)$ подразумевается главная ветвь логарифма, т. е. $\ln(x + \lambda_j y) = \ln|x + \lambda_j y| + i\arg(x + \lambda_j y)$, $0 \le \arg(x + \lambda_j y) < 2\pi$. Функция $\ln(x + \lambda_j y)$ бесконечно дифференцируема в замкнутой области $\overline{D}$, кроме луча $y = 0$, $x \ge 1$.

Доказывается, что имеет место единственность представления (5). Это означает, что все функции и постоянные, входящие в (5), определяются через $u(x,y)$ единственным образом. Так как $u \in C^\infty(\overline{D})$, то функции $\varphi_{jk}(x + \lambda_j y)$ в (5) также принадлежат этому классу [3].

3. Исследование задачи (1), (3)-(4) и доказательство теоремы 1. Пусть

$$u_0(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(r-1)^k}{k!} f_k(\cos\theta, \sin\theta), \ 1 - \varepsilon \le x^2 + y^2 \le 1 + \varepsilon, \ 0 < \varepsilon < 1, \tag{8}$$

где $f_k(x,y)$ $(k = 0,1,\dots,n-1)$ — функции в граничных условиях (3), $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, $\theta = \arg z$, $z = x + iy$. Здесь $u_0(x,y)$ — функция от x и y в окрестности единичной окружности $|z| = 1$. В работе [5] доказано, что граничное условие (3) эквивалентно условиям

$$\frac{\partial^{n-1} u(x,y)}{\partial y^k \partial x^{n-1-k}} = g_k(x,y), \ (x,y) \in \Gamma, \ k = 0,1,\dots,n-1, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^{k+j} u(-1,0)}{\partial x^k \partial y^j} = \alpha_{kj}, \ 0 \le k + j \le n-2, \tag{10}$$

где

$$g_k(x,y) = \frac{\partial^{n-1} u_0(x,y)}{\partial y^k \partial x^{n-1-k}}, \ k = 0,1,\dots,n-1, \tag{11}$$

$$\alpha_{kj} = \frac{\partial^{k+j} u_0(-1,0)}{\partial x^k \partial y^j}, \ 0 \le k + j \le n-2. \tag{12}$$

Если $2n = 6$, то условия (11) и (12) примут вид

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = g_0(x,y), \ \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = g_1(x,y), \ \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = g_2(x,y), \tag{13}$$

$$u(-1,0) = \alpha_{00}, \ \frac{\partial u(-1,0)}{\partial x} = \alpha_{10}, \ \frac{\partial u(-1,0)}{\partial y} = \alpha_{01}, \tag{14}$$

где $u_0(x,y)$, $g_k(x,y)$ и α_{kj} определяются через (8), (11), (12) соответственно при $n = 3$. Обозначим

$$w_1(x,y) = \Phi''_{10}(x + \lambda_1 y) + y\Phi''_{11}(x + \lambda_1 y) + y^2\Phi''_{12}(x + \lambda_1 y), \tag{15}$$

$$w_2(x,y) = \Phi'_{11}(x+\lambda_1 y) + 2y\Phi'_{12}(x+\lambda_1 y), \tag{16}$$

$$w_3(x,y) = \Phi_{12}(x+\lambda_1 y),\ \delta_1(x,y) = \Phi''_{20}(x+\lambda_2 y) + y\Phi''_{21}(x+\lambda_2 y) \tag{17}$$

$$\delta_2(x,y) = \Phi''_{30}(x+\lambda_3 y),\ \delta_3(x,y) = \Phi'_{21}(x+\lambda_2 y). \tag{18}$$

Подставляя общее решение (5) в граничные условия (13), получим

$$w_k(x,y) - \chi_k(x,y) = g_k(x,y),\ (x,y)\in\Gamma,\ k=0,1,2, \tag{19}$$

где

$$w_0(x,y) = \delta_1(x,y) + \delta_2(x,y) + 2a_{20},\ \chi_0(x,y) = -w_1(x,y), \tag{20}$$

$$w_1(x,y) = \lambda_2\delta_1(x,y) + \lambda_3\delta_2(x,y) + \delta_3(x,y) + 2a_{11}, \tag{21}$$

$$\chi_1(x,y) = -(\lambda_1 w_1(x,y) + w_2(x,y)), \tag{22}$$

$$w_2(x,y) = \lambda_2^2\delta_1(x,y) + \lambda_3^2\delta_2(x,y) + 2\lambda_2\delta_3(x,y) + 2a_{02}, \tag{23}$$

$$\chi_2(x,y) = -(\lambda_1^2 w_1(x,y) + 2\lambda_1 w_2(x,y) + 2w_3(x,y)). \tag{24}$$

Ясно, что

$$x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ y = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\ (x,y)\in\Gamma\ (z = x+iy), \tag{25}$$

$$(x+\lambda_j y) = \mu_{j1}\left(z+\frac{\upsilon_{j1}}{z}\right),\ (x,y)\in\Gamma\ \operatorname{Im}\lambda_j > 0, \tag{26}$$

$$(x+\lambda_j y) = \mu_{j2}\left(\frac{1}{z}+\upsilon_{j2}z\right),\ (x,y)\in\Gamma\ \operatorname{Im}\lambda_j < 0, \tag{27}$$

где

$$\mu_{j1} = \frac{\lambda_j + i}{2i},\ \mu_{j2} = \frac{i-\lambda_j}{2i},\ \upsilon_{i1} = \frac{i-\lambda_j}{i+\lambda_j},\ \upsilon_{i2} = \frac{i+\lambda_j}{i-\lambda_j}, \tag{28}$$

ясно, что $\mu_{j1}\neq 0$, $\mu_{j2}\neq 0$, $|\upsilon_{j1}|<1$, $|\upsilon_{j2}|<1$.

Пусть $\varphi(x+\lambda_j y)$ – аналитическая функция относительно своего аргумента при $(x,y)\in D$ и

$$|\varphi(x+\lambda_j y)| \le \frac{c}{|z|^m}, \tag{29}$$

где m — некоторое целое неотрицательное число.

Из (26) и (27) следует, что

$$\varphi(x+\lambda_j y)=\varphi\left(\mu_{j1}\left(z+\frac{v_{j1}}{z}\right)\right),\ (x,y)\in\Gamma,\ \operatorname{Im}\lambda_j>0, \tag{30}$$

$$\varphi(x+\lambda_j y)=\varphi\left(\mu_{j2}\left(\frac{1}{z}+v_{j2}z\right)\right),\ (x,y)\in\Gamma,\ \operatorname{Im}\lambda_j<0 \tag{31}$$

Из (28) и (29) следует, что если $\operatorname{Im}\lambda_j>0$, то $\varphi\left(\mu_{j1}\left(z+\frac{v_{j1}}{z}\right)\right)$ — аналитическая функция по z в области $|z|>1$ и $\left|\varphi\left(\mu_{j1}\left(z+\frac{v_{j1}}{z}\right)\right)\right|\le\frac{c_0}{|z|^m}$, $(x,y)\in D$. Если же $\operatorname{Im}\lambda_j<0$, то функция $\varphi\left(\mu_{j2}\left(\frac{1}{z}+v_{j2}z\right)\right)$ аналитична в круге $|z|<1$ и $\left|\varphi\left(\mu_{j2}\left(\frac{1}{z}+v_{j2}z\right)\right)\right|\le c_0|z|^m$, $|z|<1$. Из (25), подставляя x и y в (19) и имея в виду (26), (27), (30), (31), получим

$$w_{k0}(z)-\chi_{k0}(z)=g_{k0}(z),\ |z|=1,\ k=0,1,2, \tag{32}$$

где

$$w_{k0}(z)=w_k\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right),\ |z|<1,\ k=0,1,2, \tag{33}$$

$$\chi_{k0}(z)=\chi_k\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right),\ |z|>1,\ k=0,1,2, \tag{34}$$

$$g_{k0}(z)=g_k\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right),\ |z|=1,\ k=0,1,2. \tag{35}$$

Из $w_k(x,y)$ и $\chi_k(x,y)$ и равенства (30) и (31) следует, что $w_{k0}(z)$ аналитична в единичном круге $|z|<1$, а $\chi_{k0}(z)$ аналитична вне единичного круга и $\chi_{k0}(\infty)=0$ $(k=0,1,2)$. Поэтому из (34) имеем [6]

$$w_{k0}(z)=F_k(z),\ |z|<1,\ k=0,1,2, \tag{36}$$

$$\chi_{k0}(z)=F_k(z),\ |z|>1,\ k=0,1,2, \tag{37}$$

где

$$F_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g_{k0}(t)dt}{t-z}. \tag{38}$$

Таким образом, левые части (33) и (34) известны и равны $F_k(z)$. В уравнения (33) и (34) входят неизвестные функции φ_{jk} и все постоянные, кроме a_{00}, a_{10} и a_{01}. Все эти величины определяются единственным образом из (20)-(24), а постоянные a_{00}, a_{10} и a_{01} однозначно определяются из условия (14). Подставляя эти величины в общее решение (15), получим решение задачи (1), (3)-(4). При решении системы уравнений (20)-(24) мы использовали утверждение, что обобщенный детерминант Вандермонда отличен от нуля [7].

Теперь докажем, что полученное решение бесконечно дифференцируемо в $\overline{D}$. Для этого решение $u(x,y)$ представим в виде

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y), \tag{39}$$

где $u_1(x,y)$ – сумма слагаемых, содержащих логарифмы, а $u_2(x,y)$ – сумма остальных слагаемых. Ясно, что

$$u_1(x,y) = \sum_{j=1}^{3} (b_{j0} + c_{j0}(x+\lambda_j y)) \ln(x+\lambda_j y) + \sum_{j=1}^{2} d_{j1} y \ln(x+\lambda_j y). \tag{40}$$

Из построения решения следует, что $u_2(x,y)$ бесконечно дифференцируема в $\overline{D}$. Так как $u(x,y)$ удовлетворяет условиям (3) и $f_k(x,y) \in C^\infty(\Gamma)$, то

$$\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial r^k} \in C^\infty(\Gamma), \ k = 0,1,2. \tag{41}$$

Отсюда и из (39) следует, что

$$\frac{\partial^k u_1(x,y)}{\partial r^k} \in C^\infty(\Gamma), \ k = 0,1,2. \tag{42}$$

Далее из (42) следует

$$\frac{\partial^{k+j} u_1(x,y)}{\partial x^k \partial y^j} \in C^\infty(\Gamma), \ 0 \le k+j \le 2. \tag{43}$$

Обозначим

$$P(x,y) = b_{10} + c_{10}(x+\lambda_1 y) + d_{11} y - \sum_{j=2}^{3} (b_{j0} + c_{j0}(x+\lambda_j y)) - d_{21} y. \tag{44}$$

Из (40) и (43) имеем

$$\frac{\partial^{j+k} P(1,0)}{\partial x^j \partial y^k} = 0, \ 0 \le j+k \le 1. \tag{45}$$

Но так как $P(x,y)$ – полином порядка не выше 1 относительно x и y, то из (45) следует, что

$$P(x,y) \equiv 0. \tag{46}$$

Из (46) следует, что $u_1(x,y)$ – бесконечно дифференцируема в $\overline{D}$ [4].

Теорема 1 доказана.

Здесь мы указали также эффективный метод решения задачи (1), (3)-(4), без использования сингулярных интегральных уравнений.

Институт математики НАН РА

А. Я. Саакян

Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения $2n$-порядка вне круга

Рассматривается задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения $2n$-порядка вне круга. Доказывается, что задача имеет решение, оно единственное и пишется в явном виде.

Ա. Յա. Սահակյան

Դիրիխլեի խնդիրը $2n$-կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարումների համար շրջանից դուրս

Դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը բարձր կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարումների համար շրջանից դուրս: Ապացուցվում է, որ խնդիրն ունի լուծում. լուծումը միակն է և գրվում է բացահայտ տեսքով:

A. Ya. Sahakyan

Dirichlet Problem for the $2n$-Order Properly Elliptic Equations out of Circle

The Dirichlet problem for the $2n$-order properly elliptic equations out of circle is considered. It is proved that the problem has a solution; the solution is only one and is written in the explicit form.

Литература

1. *Товмасян Н.Е.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2000. Т. 35. N6.

2. *Товмасян Н.Е.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2006. Т. 41. N5. С. 53-57.

3. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М. Наука. 1966.

4. *Саакян А.Я.* - ДНАН Армении. Математика. 2007. Т. 107. N4. С. 331-336.

5. *Товмасян Н.Е., Закарян В.С.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2002. Т. 37. N6. С. 5-40.

6. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. Физматгиз. 1962.

7. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. М. Наука. 1965.