ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 108 2008 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.957

Чл.-кор. НАН РА Н. Е. Товмасян, О. А. Бабаян

Движение летательных аппаратов с заданной горизонтальной скоростью и оптимальное управление

(Представлено 19/IX 2007)

Ключевые слова: *траектория полета, класс универсальных траекторий, расход топлива, летательный аппарат переменной массы, горизонтальная скорость*

В работе рассматривается движение летательного аппарата (ЛА) без крыльев под воздействием реактивной силы $\overrightarrow{F_R}$, силы сопротивления среды $\overrightarrow{F_C}$ и силы притяжения Земли $\overrightarrow{F_g}$:

$$\overrightarrow{F_g} = m\overrightarrow{g}, \quad \overrightarrow{F_C} = -\kappa\overrightarrow{V}, \quad \overrightarrow{F_R} = -k\frac{dm(t)}{dt}\frac{\overrightarrow{V}}{V},$$

где $m(t)$ − масса ЛА в момент времени t, $\overrightarrow{V}(t) = (V_1(t), V_2(t))$ − скорость ЛА в момент времени t, $V(t) = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$; κ − коэффициент сопротивления среды, k − постоянный коэффициент реактивной силы. Предполагаем, что движение ЛА происходит около земной поверхности и зона полета мала по сравнению с радиусом Земли, поэтому ускорение силы тяжести можем считать постоянным вектором $\overrightarrow{g} = (0, -g)$.

Будем считать, что начало координатной системы находится на поверхности Земли, положительное направление оси OY направлено вертикально вверх, а движение ЛА происходит в плоскости XOY $(x > 0)$.

1. Пусть движение ЛА осуществляется с начальной скоростью $V_0 = V(0)$, вектор начальной скорости $\overrightarrow{V}(0)$ составляет угол α с горизонтом, а горизонтальная составляющая вектора скорости летательного аппарата определяется формулой

$$V_1(x) = V_0 \cos\alpha \cdot \eta_0(x), \quad x \geq 0, \tag{1}$$

где η_0 — заданная положительная функция.

Так как $V_1(0) = V_0 \cos\alpha$, то из (1) следует, что

$$\eta_0(0) = 1. \tag{2}$$

Движение ЛА переменной массы описывается уравнением Мещерского [1]

$$m(t)\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \overrightarrow{F_R} + \overrightarrow{F_C} + \overrightarrow{F_g}.$$

Пусть $y = f(x)$ — траектория полета. Проецируя уравнения движения ЛА на оси OX и OY, в [2] получено, что

$$f''(x) = -\frac{g}{V_1^2(x)}. \tag{3}$$

Отсюда и из (1) имеем

$$f''(x) = \frac{-g}{V_0^2 \cos^2 \alpha \eta_0^2(x)}.$$

Пусть $f(0) = 0$. Ясно, что $f'(0) = \operatorname{tg}\alpha = a$. Тогда из последнего равенства получаем

$$f(x) = ax - \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha}\int_0^x \frac{x-t}{\eta_0^2(t)}dt. \tag{4}$$

Таким образом, траектория полета ЛА $y = f(x)$ определяется формулой (4).

2. Пусть

$$V_1(x) = V_0 \cos\alpha \cdot \eta_1\left(\frac{x}{x_0}\right), \quad 0 \le x \le x_0, \tag{5}$$

где η_1 — неотрицательная функция на отрезке $[0,1]$. Ясно, что $\eta_1(0) = 1$.

Пусть V_0 и x_0 заданы. Выясним, при каких η_1 и α возможен полет летательного аппарата из точки $(0,0)$ до точки $(x_0, 0)$. Итак, имеем, что

$$f(0) = 0, \quad f(x_0) = 0. \tag{6}$$

Из (4) имеем

$$f(x) = ax - \frac{g(1+a^2)}{V_0^2}\int_0^x \frac{x-t}{\eta_1^2(\frac{t}{x_0})}dt, \quad 0 \le x \le x_0.$$

Делая замену переменной $\frac{t}{x_0} = \tau$, получим

$$f(x) = ax - \frac{g(1+a^2)x_0}{V_0^2}\int_0^{\frac{x}{x_0}} \frac{x-\tau x_0}{\eta_1^2(\tau)}d\tau. \tag{7}$$

Подставляя $x = x_0$ и учитывая (6), получим

$$ax_0 - \frac{g(1+a^2)x_0^2}{V_0^2}\int\limits_0^1 \frac{1-\tau}{\eta_1^2(\tau)}d\tau = 0. \tag{8}$$

Определим норму функции ω ($\omega(\tau) \geq 0, 0 \leq \tau \leq 1$) следующим образом:

$$\|\omega\| = \int\limits_0^1 \omega(\tau)(1-\tau)d\tau.$$

Обозначим

$$\eta_2(\tau) = \frac{1}{\eta_1^2(\tau)}, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Ясно, что

$$\eta_2(0) = 1, \quad \eta_2(\tau) > 0, \qquad 0 \leq \tau \leq 1.$$

В этих обозначениях (8) примет вид

$$a^2 - \frac{\gamma}{\|\eta_2\|x_0}a + 1 = 0, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{V_0^2}{g}. \tag{9}$$

Следовательно, для решения уравнения (9) относительно a необходимо и достаточно выполнение условия

$$\|\eta_2\| \leq \frac{\gamma}{2x_0}. \tag{10}$$

При выполнении этого условия оба решения уравнения (9) положительные и определяются формулой

$$a_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\|\eta_2\|x_0} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{\|\eta_2\|^2x_0^2} - 4}\right). \tag{11}$$

Следовательно, имеет место

Теорема 1. *Пусть горизонтальная составляющая скорости летательного аппарата V_1 определяется формулой (5), где $\eta_1(0) = 1$. Тогда полет из точки $(0,0)$ до точки $(x_0, 0)$ возможен тогда и только тогда, когда η_2 удовлетворяет условию (10), а $a = \operatorname{tg}\alpha$ определяется формулой (11).*

Замечание 1. *Из (10) следует, что зона досягаемости по оси OX определяется формулой*

$$x_0 \leq \frac{\gamma}{2\|\eta_2\|}.$$

3. Пусть теперь

$$f(0) = 0, \quad f(x_0) = y_0. \tag{12}$$

Тогда без второго условия (12) получим формулу (7). Подставляя в (7) $x = x_0$ и имея в виду второе условие (12), получим

$$a^2 - \frac{\gamma}{\|\eta_2\| x_0} a + \left(1 + \frac{y_0 \gamma}{\|\eta_2\| x_0^2}\right) = 0. \tag{13}$$

Для того, чтобы полученное уравнение имело решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\gamma^2}{\|\eta_2\|^2 x_0^2} - 4\left(1 + \frac{y_0 \gamma}{\|\eta_2\| x_0^2}\right) \geq 0.$$

Отсюда, учитывая, что $\|\eta_2\| \geq 0$, получаем необходимое и достаточное условие на функцию η_2:

$$y_0 \leq \frac{\gamma}{4\|\eta_2\|} - \frac{x_0^2 \|\eta_2\|}{\gamma} \equiv \Phi(\|\eta_2\|). \tag{14}$$

Легко проверить, что при выполнении условия (14) оба решения уравнения (13) положительны и определяются формулой

$$a_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\|\eta_2\| x_0} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{\|\eta_2\|^2 x_0^2} - 4\left(1 + \frac{y_0 \gamma}{\|\eta_2\| x_0^2}\right)}\right). \tag{15}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Пусть горизонтальная составляющая скорости летательного аппарата V_1 определяется формулой (5), где $\eta_1(0) = 1$. Тогда полет летательного аппарата из точки $(0,0)$ до точки (x_0, y_0) возможен тогда и только тогда, когда η_2 удовлетворяет условию (14), а $a = \operatorname{tg} \alpha$ определяется формулой (15).*

Замечание 2. *Условие (14) определяет зону досягаемости для случая полета летательного аппарата из точки $(0,0)$ до точки (x_0, y_0).*

Замечание 3. *Поскольку за счет выбора η_2 число $\|\eta_2\|$ можно сделать сколь угодно малым, то ясно, что всегда существует функция η_1 такая, что $\eta_1(0) = 1$, которая удовлетворяет условию (14).*

Замечание 4. *Пусть $\eta_1(0) = 1$ и η_1 удовлетворяет условию (14). Тогда полет летательного аппарата из точки $(0,0)$ до точки (x_0, y_0) можно осуществить по траектории $y = f(x)$, где $f(x)$ определяется формулой (7).*

Замечание 5. *Подставляя в (14) и (15) $y_0 = 0$, получим утверждение теоремы для случая полета летательного аппарата из точки $(0,0)$ до точки $(x_0, 0)$. В этом случае результаты совпадают с результатами, полученными в пункте 2.*

4. Рассмотрим некоторые примеры. Пусть

$$V_1(x) = V_0 \cos\alpha \left(1 + \mu \frac{x}{x_0}\right)^n, \quad 0 \leq x \leq x_0, \tag{16}$$

где n — фиксированное положительное число, μ — параметр, $\mu > 0$. Рассмотрим движение летательного аппарата с горизонтальной составляющей скорости (16) из точки $(0,0)$ до точки (x_0, y_0) по траектории $y = f(x)$. Итак, $f(0) = 0$, $f(x_0) = y_0$.

Из (16) имеем, что

$$\eta_1(\tau) = (1 + \mu\tau)^n, \quad \eta_2(\tau) = (1 + \mu\tau)^{-2n}. \tag{17}$$

Поскольку $\eta_1(0) = 1$, то из теоремы следует, что для того, чтобы полет летательного аппарата из точки $(0,0)$ до точки (x_0, y_0) по траектории $y = f(x)$ был возможен, необходимо и достаточно, чтобы функция η_2 удовлетворяла условию (14). Имеем

$$\psi_n(\mu) \equiv \|\eta_2\| = \int\limits_0^1 (1 + \mu\tau)^{-2n}(1 - \tau)d\tau. \tag{18}$$

Делая замену переменной $1 + \mu\tau = x$, получим

$$\psi_n(\mu) = \int\limits_1^{1+\mu} x^{-2n}\left(\frac{\mu+1}{\mu} - \frac{x}{\mu}\right)dx = \frac{\mu+1}{\mu}\int\limits_1^{1+\mu} x^{-2n}dx - \frac{1}{\mu}\int\limits_1^{1+\mu} x^{-2n+1}dx.$$

При $n = 0.5$ имеем $\psi_{0.5}(\mu) = \dfrac{(1+\mu)\ln(1+\mu) - \mu}{\mu^2}$.

При $n = 1$ имеем $\psi_1(\mu) = \dfrac{\mu - \ln(1+\mu)}{\mu^2}$.

При $n \neq 0.5, n \neq 1$ имеем $\psi_n(\mu) = \dfrac{(1+\mu)^{-2n+2} - (-2n+2)\mu - 1}{(-2n+1)(-2n+2)\mu^2}$.

Легко видеть, что $\lim\limits_{\mu\to+\infty} \psi_n(\mu) = 0, (n > 0)$. Подставляя в (18) $\mu = 0$, получаем, что $\psi_n(0) = 0.5$. Из (18) имеем $\psi_n' < 0$, следовательно функция ψ_n монотонно убывает при $\mu > 0$. Таким образом, при всех $\mu \geq 0$ имеем $0 < \psi_n(\mu) \leq 0.5$. Рассмотрим функцию Φ — правую часть неравенства (14). Легко видеть, что Φ убывает. Поэтому, так как $\psi_n(\mu) \leq 0.5$, то

$$\Phi(\|\eta_2\|) \geq \Phi(0.5) = \frac{\gamma^2 - x_0^2}{2\gamma}.$$

Учитывая необходимое и достаточное условие (14), получаем, что если горизонтальная составляющая скорости летательного аппарата V_1 определяется формулой (16), то

1) при $y_0 \leq \dfrac{\gamma^2 - x_0^2}{2\gamma}$ полет от точки $(0,0)$ до заданной точки (x_0, y_0) по траектории $y = f(x)$ можно совершить при любом значении параметра μ, в частности, с постоянной горизонтальной скоростью;

2) при $y_0 > \dfrac{\gamma^2 - x_0^2}{2\gamma}$ следует выбрать $\|\eta_2\|$ настолько малой, чтобы выполнялось неравенство (14). Это возможно, так как функция Φ стремится к бесконечности при $\|\eta_2\| \to 0$. Поскольку Φ монотонно убывает, то единственным образом определяется число μ_n такое, что

$$y_0 = \Phi(\psi_n(\mu_n)).$$

При этом, если $\mu \geq \mu_n$, то полет от точки $(0,0)$ до заданной точки (x_0, y_0) по траектории $y = f(x)$ возможен.

Функция f определяется формулой (7), $a = \operatorname{tg}\alpha$ — формулой (15), а функции η_1 и η_2 — формулами (17).

Пусть сила сопротивления среды $\overrightarrow{F_C}$ отсутствует. Рассмотрим расход топлива при полете летательного аппарата от точки $(0,0)$ до заданной точки (x_0, y_0) по траектории $y = f(x)$, когда горизонтальная составляющая скорости летательного аппарата определяется формулой (16). Из полученного в [2] выражения для расхода топлива при полете по траектории $y = f(x)$ следует, что в этом случае расход топлива летательного аппарата будет определяться формулой

$$Q = m\exp\left(\frac{1}{k}\int\limits_0^{x_0}\frac{f'''(x)\sqrt{g}}{2\left(-f''(x)\right)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2dx}\right) - m, \tag{19}$$

где m — масса летательного аппарата в конечной точке полета (x_0, y_0).

Из формул (3), (7) и (17) получаем

$$f'(x) = a + \frac{gx_0}{V_0^2\cos^2\alpha(2n-1)}\left(-1+\left(1+\mu\frac{x}{x_0}\right)^{-2n+1}\right);$$

$$\frac{f'''(x)\sqrt{g}}{2(-f''(x))^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{2g}{V_1^3}V_1'\sqrt{g}}{\left(\frac{g}{V_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = V_1' = \frac{n\mu\cos\alpha}{x_0}\left(1+\mu\frac{x}{x_0}\right)^{n-1}.$$

Подставляя полученные выражения в (19), имеем

$$Q = m\exp\left[\frac{n\mu V_0\cos\alpha}{kx_0}\int\limits_0^{x_0}\left(1+\frac{\mu x}{x_0}\right)^{n-1}\sqrt{1+\left(a+\frac{gx_0(1+a^2)}{(2n-1)V_0^2}\left(\left(1+\frac{\mu x}{x_0}\right)^{1-2n}-1\right)\right)^2}dx\right] - m.$$

Совершая замену переменной $1 + \dfrac{\mu x}{x_0} = \tau$, получим

$$Q = m\exp\left[\frac{nV_0\cos\alpha}{k}\int\limits_1^{1+\mu}\tau^{n-1}\sqrt{1+\left(a+\frac{gx_0(1+a^2)}{(2n-1)V_0^2}\left(\tau^{1-2n}-1\right)\right)^2}d\tau\right] - m.$$

Поскольку выражение под знаком интеграла положительно, то функция $Q = Q(\mu)$ возрастает относительно μ. Это значит, что минимальный расход топлива достигается при минимальном допустимом значении параметра μ, т. е., при $\mu = \mu_n$.

Государственный инженерный университет Армении

Чл.-кор. НАН РА Н. Е. Товмасян, О. А. Бабаян

Движение летательных аппаратов с заданной горизонтальной скоростью и оптимальное управление

Исследуется движение летательного аппарата с заданной горизонтальной скоростью под воздействием реактивной силы, силы сопротивления среды и силы притяжения Земли. Получены необходимые и достаточные условия, при которых возможно осуществить полет до заданной точки с заданной горизонтальной скоростью. При отсутствии силы сопротивления среды в определенном классе функций получена формула горизонтальной скорости полета, при которой расход топлива минимален.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ն.Ե. Թովմասյան, Հ.Ա. Բաբայան

Թռչող սարքերի շարժումը տրված հորիզոնական արագությամբ և օպտիմալ կառավարում

Աշխատանքում դիտարկվում է թռչող սարքերի շարժումը տրված հորիզոնական արագությամբ ռեակտիվ, միջավայրի դիմադրության և Երկրի ձգողության ուժերի համատեղ ազդեցության տակ: Ստացված են պայմաններ, որոնք անհրաժեշտ ու բավարար են մինչև տրված կետը տրված հորիզոնական արագությամբ թռիչքի իրականացման համար: Միջավայրի դիմադրության ուժի բացակայության դեպքում ֆունկցիաների որոշակի դասում ստացված է թռիչքի արագության հորիզոնական բաղադրիչի բանաձև, որի դեպքում վառելիքի ծախսը մինիմալ է:

Corresponding member of NAS RA N. E. Tovmasyan, H. A. Babayan

The Motion of the Aircraft with the Given Horizontal Speed and Optimal Control

We consider the motion of the aircraft with the given horizontal speed under simultaneous action of reactive force, medium resistance force and gravity force. Sufficient and

necessary conditions for the possibility of the flight to the given point are obtained. In the certain class of functions, in the absense of the medium resistance force, the horizontal speed formula ensuring minimal fuel consumption is obtained.

Литература

1. *Дмитриевский А.А.* Внешняя баллистика. М. Машиностроение. 1979. 479 с.

2. *Tovmasyan N.E.* Topics in Analysis and its Applications. NATO Science series. Series II. 2004. V. 147. Kluwer Academic Publishers. P. 347-364.