ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 107 2007 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

П. А. Матевосян

Теоремы вложения в пространстве A^*_ω

(Представлено академиком В.С. Захаряном 11/X 2007)

Ключевые слова: *голоморфные функции, вложения, единичный круг, мера, интеграл*

Пусть D - единичный круг на комплексной плоскости и пусть $\omega(r)$ - монотонная неотрицательная функция из класса $L^1(0,1)$. Обозначим через A^*_ω класс голоморфных в круге функций $f(z)$, для которых

$$\|f(z)\|_{A^*_\omega} = \int_D \omega(1-|z|)\log^+|f(z)|dm_2(z) < +\infty.$$

Отметим, что при $\omega(r) = (1-r^2)^\beta$, $\beta > -1$, эти классы впервые были введены и подробно изучены в работах М.М.Джрбашяна [1,2]. В дальнейшем будем предполагать, что $\omega(r)$ удовлетворяет условию

$$\operatorname*{Sup}_{0<r<1}\left|\frac{\omega'(r)\cdot(1-r)}{\omega(r)}\right| = \beta_\omega < +\infty.$$

При этом предполагаем, что $0 < \beta_\omega < 1$ имеет место, когда $\omega(r)$ монотонно растет.

В данной работе получим полное описание тех неотрицательных мер μ на D, для которых имеет место вложение в пространстве A^*_ω. Основным результатом работы является следующая

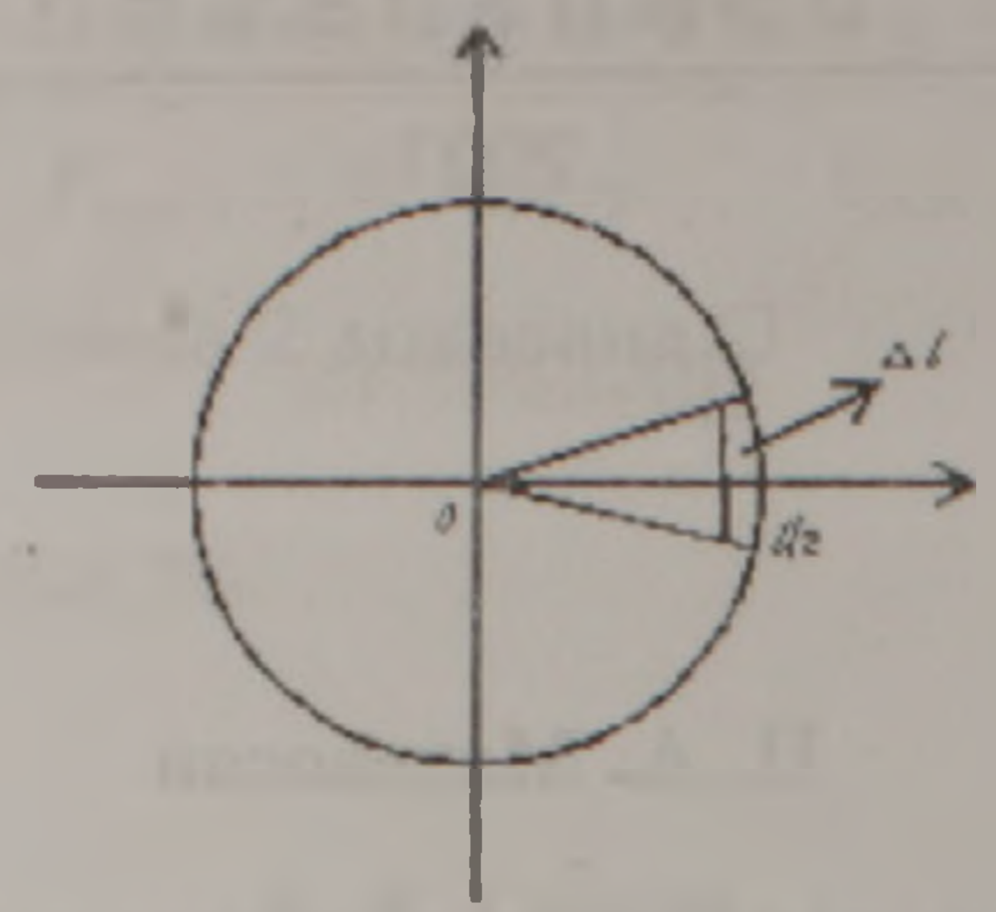
Теорема 1. *Пусть μ - конечная неотрицательная мера в единичном круге D. Тогда следующие условия равносильны:*

$$a)\quad \int_D \log^+|f(z)|d\mu(z) \le C\int_D \log^+|f(z)|\cdot\omega(1-|z|)dm_2(z), \tag{1}$$

$$б)\quad \mu(\Delta_l) \le \text{const}\cdot\omega(l)\cdot l^2, \tag{2}$$

где C - некоторая постоянная, а

$$\Delta_l \stackrel{def}{=} \left\{ z : 1 - l \leq |z| < 1, |\arg z| < \frac{l}{2} \right\}.$$



Доказательство. Докажем импликацию а)⇒б).

Рассмотрим функцию $g(z)$ из класса A^1_ω, т.е.

$$\int_D \omega(1-|z|)|g(z)|dm_2(z) < +\infty.$$

Тогда функция $f(z) = \exp\{g(z)\}$ будет принадлежать классу A^*_ω. Следовательно, имеем

$$\log^+|f(z)| \leq \log^+(\exp\{g(z)\}) = (Reg(z))^+ \leq |g(z)|.$$

Поэтому из неравенства (1) получаем

$$\int_D (Reg(z))^+ d\mu(z) \leq \int_D |g(z)|\omega(1-|z|)dm_2(z). \tag{3}$$

Обозначим $u(z) = Reg(z)$, $-u(z) = -Reg(z)$. По определению $(u(z))^+$ имеем

$$(u(z))^+ = \begin{cases} u(z), & \text{когда } u(z) \geq 0, \\ 0, & \text{когда } u(z) < 0, \end{cases}$$

$$(u(z))^- = \begin{cases} -u(z), & \text{когда } u(z) \leq 0, \\ 0, & \text{когда } u(z) > 0, \end{cases}$$

Следовательно,

$$|u(z)| = (u(z))^+ + (u(z))^-.$$

Из неравенства (3) имеем

$$\int_D (u(z))^+ d\mu(z) \leq C \int_D |u(z)|\omega(1-|z|)dm_2(z),$$

$$\int_D (u(z))^- d\mu(z) \leq C \int_D |u(z)|\omega(1-|z|)dm_2(z).$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_D ((u(z))^+ + (u(z))^-)d\mu(z) \le C_1 \int\limits_D |u(z)|\omega(1-|z|)dm_2(z)$$

или

$$\int\limits_D |u(z)|d\mu(z) \le C_1 \cdot \int\limits_D |u(z)|\omega(1-|z|)dm_2(z). \tag{4}$$

Рассмотрим функцию $\exp\{\pm ig(z)\}$, которая также принадлежит классу A^*_ω. Обозначив $\pm V(z) = Re\{\pm ig(z)\}$, получим

$$\int\limits_D |V(z)|d\mu(z) \le C_2 \cdot \int\limits_D |V(z)|\omega(1-|z|)dm_2(z). \tag{5}$$

Объединяя оценки (4) и (5), получим

$$\int\limits_D (|u(z)| + |V(z)|)d\mu(z) \le C_3 \cdot \int\limits_D (|u(z)| + |V(z)|)\omega(1-|z|)dm_2(z). \tag{6}$$

Так как $g(z) = u(z) + iV(z)$ и имея в виду лемму Шамояна [3], гласящую, что *если $u(z)$ и $V(z)$ сопряженные субгармонические функции, тогда имеет место следующая оценка:*

$$\int\limits_D |V(z)|\omega(1-|z|)dm_2(z) \le C \cdot \int\limits_D |u(z)|\omega(1-|z|)dm_2(z),$$

из неравенства (6) получим

$$\int\limits_D |g(z)|d\mu(z) \le C_4 \int\limits_D |u(z)|\omega(1-|z|)dm_2(z).$$

Отсюда окончательно получим

$$\int\limits_D |g(z)|d\mu(z) \le C_5 \int\limits_D |g(z)|\omega(1-|z|)dm_2(z). \tag{7}$$

Таким образом, для любой $g(z) \in A^1_\omega$ справедливо неравенство (7). Теперь положим

$$g(z) = \frac{(1-\delta^2)^\beta}{(1-\delta z)^{2\beta}},\ \beta > 0,\ 0 < \delta < 1.$$

Тогда для оценивания левого и правого интеграла в неравенстве (7) имеем

$$\int\limits_D |g(z)|\omega(1-|z|)dm_2(z) = \int\limits_D \frac{(1-\delta^2)^\beta}{(1-\delta z)^{2\beta}}\omega(1-|z|)dm_2(z) =$$

$$= (1-\delta^2)^\beta \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega(1-r) r dr d\varphi}{\left[(1-\delta r)^2 + 4\delta r \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right]^\beta} \le C \cdot (1-\delta^2)^\beta \int\limits_0^1 \frac{\omega(1-r) r dr}{(1-\delta r)^{2\beta-1}} =$$

$$= C \cdot (1-\delta^2)^\beta \left(\int\limits_0^\delta \frac{\omega(1-r) r dr}{(1-\delta r)^{2\beta-1}} + \int\limits_\delta^1 \frac{\omega(1-r) r dr}{(1-\delta r)^{2\beta-1}} \right) \le \tag{7'}$$

$$\le C \cdot \frac{(1-\delta^2)^\beta \omega(1-\delta)}{(1-\delta)^{2\beta-2}} = \frac{C \cdot \omega(l)}{l^{\beta-2}},$$

где $l = 1-\delta$, $0 < l < 1$.

Оценим снизу левый интеграл в неравенстве (7). Имеем

$$\int\limits_D |g(z)| d\mu(z) = \int\limits_D \frac{(1-\delta^2)^\beta}{|1-\delta z|^{2\beta}} d\mu(z) \ge \frac{(1-\delta^2)^\beta}{(1-\delta)^{2\beta}} \int\limits_{\Delta_l} d\mu(z) = \frac{\mu(\Delta_l)}{l^\beta}, \tag{7''}$$

так как

$$|1-\delta z|^2 = [(1-\delta) + \delta(1-r)]^2 + 4\delta r \sin^2 \frac{\varphi}{2} \ge (1-\delta)^2$$

при $z \in \Delta_l$. Поэтому

$$\frac{(1-\delta^2)^\beta}{|1-\delta z|^{2\beta}} \ge \frac{(1-\delta^2)^\beta}{(1-\delta)^{2\beta}}.$$

Объединяя оценки (7') и (7''), из неравенства (7) приходим к неравенству (2):

$$\frac{\mu(\Delta_l)}{l^\beta} \le \frac{\omega(l)}{l^{\beta-2}}, \text{ т.е.}$$

$$\mu(\Delta_l) \le \mathrm{const} \cdot \omega(l) \cdot l^2.$$

Докажем импликацию б)$\Rightarrow$а).

Известно, что если функция $f(z) \in A^*_\omega$, то $f(z)$ допускает следующую факторизацию [3]:

$$f(z) = \pi^f_\beta(z, z_k) \cdot \exp\{g^f_\beta(z)\}, \tag{8}$$

где $\beta > \beta_\omega$,

$$\pi^f_\beta(z, z_k) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left\{ -\frac{2(\beta+1)}{\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\beta \log\left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{z_k}\right| \rho d\rho d\theta}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\beta+2}} \right\},$$

$$g^f_\beta(z) = \frac{\beta+1}{\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\beta \log\left|f(\rho e^{i\theta})\right| \rho d\rho d\theta}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\beta+2}},$$

$$\beta_\omega = \mathop{\mathrm{Sup}}_{0<t<1} \left| \frac{\omega'(t) \cdot (1-t)}{\omega(t)} \right|, \quad z \in D.$$

Из (8) имеем

$$\log^+|f(z)| \le \log^+|\pi^f_\beta(z,z_k)| + (Re\, g^f_\beta(z))^+.$$

Поскольку $g^f_\beta(z) \in A^1_\omega$, то для функций $(Re\, g^f_\beta(z))^+$ неравенство (1) имеет место, как только выполняется условие (2), т.е.

$$\int_D Re(g^f_\beta(z))^+ d\mu(z) \le C \cdot \int_D (Re\, g^f_\beta(z))^+ \omega(1-|z|)dm_2(z). \qquad (8')$$

Остается доказать, что для функций $\log^+|\pi^f_\beta(z,z_k)|$ также имеет место неравенство (1) при условии (2). Известно, что если нули $\{z_k\}_1^\infty$, удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^\infty (1-|z_k|)^2\omega(1-|z_k|) < +\infty, \quad \beta > \beta_\omega,$$

то $\pi^f_\beta(z,z_k)$ принадлежит классу A^*_ω и имеет место следующая оценка [3]:

$$\log|\pi^f_\beta(z,z_k)| \le \mathrm{const} \sum_{k=1}^\infty \frac{(1-|z_k|^2)^{\beta+2}}{|1-\overline{z}_k z|^{\beta+2}}, \; z \in D,$$

следовательно, имеем

$$\begin{aligned}\int_D \log^+|\pi^f_\beta(z,z_k)|d\mu(z) &\le \mathrm{const} \sum_{k=1}^\infty \frac{(1-|z_k|^2)^{\beta+2}d\mu(z)}{|1-\overline{z}_k z|^{\beta+2}} \le \\ &\le \mathrm{const} \cdot \sum_{k=1}^\infty (1-|z_k|^2)^{\beta+2} \int_D \frac{d\mu(z)}{|1-\overline{z}_k z|^{\beta+2}}.\end{aligned} \qquad (9)$$

Отдельно оценим внутренний интеграл. По лемме Шамояна [3], имеем

$$\int_D \frac{d\mu(z)}{|1-\overline{z}_k z|^{\beta+2}} = \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \frac{1}{|1-\overline{z}_k z_{k,l}|^{\beta+2}} \cdot \int_{\Delta_{k,l}} d\mu(z) \le \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \frac{\mu(\Delta_{k,l})}{|1-\overline{z}_k z_{k,l}|^{\beta+2}}, \qquad (9')$$

где

$$\Delta_{k,l} \stackrel{def}{=} \left\{ z : 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \le |z| < 1 - \frac{1}{2^k}, \; \frac{\pi l}{2^k} \le \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\}.$$

Так как

$$\mu(\Delta_{k,l}) \le \mu(\tilde{\Delta}_{k,l}) \le c \cdot \omega\left(\frac{1}{2^k}\right) \cdot \left(\frac{1}{2^k}\right)^2,$$

где

$$\tilde{\Delta}_{k,l} \stackrel{def}{=} \left\{ z : 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \le |z| < 1 - \frac{1}{2^k}, \; \frac{\pi l}{2^k} \le \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\},$$

то из (9') получим

$$\int_D \frac{d\mu(z)}{|1-\overline{z}_k z|^{\beta+2}} \le \mathrm{const} \cdot \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \frac{\omega(1-|z_{k,l}|) \cdot (1-|z_{k,l}|)^2}{|1-\overline{z}_k z_{k,l}|^{\beta+2}} \le \int_D \frac{\omega(1-|z|)}{|1-\overline{z}_k z|^{\beta+2}} dm_2(z).$$

Имея в виду работу [3], окончательно получим

$$\int\limits_D \frac{d\mu(z)}{|1-\overline{z}_k z|^{\beta+2}} \le \text{const}\cdot\frac{\omega(1-|z_k|)}{|1-z_k|^{\beta}}.$$

Таким образом, из (9) получим

$$\begin{aligned}\int\limits_D \log^+|\pi_\beta^f(z,z_k)|d\mu(z) &\le \text{const}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^2\omega(1-|z_k|)\le\\ &\le \text{const}\cdot\int\limits_D \omega(1-|z|)\log^+|f(z)|dm_2(z).\end{aligned}\tag{8''}$$

Объединяя (8') и (8"), окончательно приходим к доказательству достаточного условия теоремы, т.е.

$$\int\limits_D \log^+|f(z)|d\mu(z)\le C\int\limits_D \omega(1-|z|)\log^+|f(z)|dm_2(z),$$

если имеет место неравенство (2).

Теорема полностью доказана.

На основе этой теоремы можно доказать следующее свойство для функций класса A^*_ω.

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию Карлесона*

$$\prod_{k\ne m}\left|\frac{z_k-z_m}{1-\overline{z}_k z_m}\right|\ge\delta,\ 0<\delta<1.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\omega(1-|z_k|)(1-|z_k|)^2\log^+|f(z_k)|<+\infty$$

для любого $f(z)\in A^*_\omega$.

Доказательство. Положим

$$\mu(e)=\sum_{z_k\in e}\omega(1-|z_k|)(1-|z_k|)^2,$$

где $\mu(e)$ - мера Дирака. Докажем, что для любого $f(z)\in A^*_\omega$ имеет место

$$\int\limits_D \log^+|f(z)|d\mu(z)<+\infty.$$

По теореме 1 достаточно доказать, что

$$|\mu(\Delta_l)|\le\sum_{z_k\in\Delta_l}\omega(1-|z_k|)(1-|z_k|)^2\le C\cdot\omega(l)\cdot l^2,$$

где $1 - l \le |z_k| < 1$. Имеем

$$|\mu(\Delta_l)| \le \sum_{z_k \in \Delta_l} \omega(1-|z_k|)(1-|z_k|)^2 \le \omega(l) \cdot l \cdot \sum_{z_k \in \Delta_l} (1 - z_k).$$

По теореме Карлесона имеем

$$\sum_{z_k \in \Delta_l} (1 - |z_k|) \le C \cdot l.$$

Поэтому $\mu(\Delta_l) \le \mathrm{const} \cdot \omega(l) \cdot l^2$.

По доказанной теореме 1 имеем

$$\int\limits_D \log^+ |f(z)| d\mu(z) \le \sum_{k=1}^{\infty} \omega(1-|z_k|)(1-|z_k|)^2 \log^+ |f(z_k)| < +\infty$$

Теорема доказана. Можно доказать и обратное утверждение:

Допустим, $\{C_k\}_1^\infty$ - произвольная последовательность комплексных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega(1-|C_k|)(1-|C_k|)^2 \log^+ |f(C_k)| < +\infty,$$

тогда существует функция $f(z) \in A_\omega^*$ такая, что $f(z) = C_k$ при всех k.

Гюмрийский филиал ГИУА

П. А. Матевосян

Теоремы вложения в пространстве A_ω^*

Получено полное описание тех неотрицательных мер μ на D, для которых имеет место вложение в пространстве A_ω^*.

Պ. Ա. Մաթևոսյան

Ներդրման թեորեմներ A_ω^* տարածությունում

Աշխատանքում ստացվել են բոլոր այն ոչ բացասական μ չափերի լրիվ նկարագիրը D-ի վրա, որոնց դեպքում տեղի ունի ներդրում A_ω^* տարածությունում:

P. A. Matevossyan

Theorems of Inclusion in the Space A^*_ω

In the work it is received the full description of those non-negative measures of μ on D in the case of which there is an inclusion in the A^*_ω space.

Литература

1. *Джрбашян М.М.* - ДАН АрмССР 1945. Т. 3. N 1, С. 3-9.

2. *Джрбашян М.М.* - Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР. 1948 Вып. 2. С. 3-55.

3. *Шамоян Ф.А.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1978. Т. 13. N 5-6. С. 405-422.