ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր 107 2007 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.22

А. Я. Саакян

Общее решение правильно эллиптического уравнения высокого порядка вне круга

(Представлено чл.-кор. НАН РА Н.Е. Товмасяном 20/VII 2007)

Ключевые слова: *правильно эллиптическое уравнение, аналитические функции, общее решение, характеристическое уравнение*

Введение. Формулировка результатов. Пусть $D^- = \{z||z| > 1\}$ − внешняя область единичного круга комплексной плоскости и $\Gamma = \partial D$ − ее граница, $D^+ = \{z||z| < 1\}$, $z = x + iy$. В области D^- рассматривается уравнение

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k \frac{\partial^{2n} u}{\partial y^k \partial x^{2n-k}}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D^-, \tag{1}$$

где A_k − комплексные постоянные, $A_{2n} \neq 0$. Мы предполагаем, что уравнение (1) правильно эллиптическое, т.е. характеристическое уравнение

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k \lambda^k = 0 \tag{2}$$

не имеет действительных корней и n корней этого уравнения имеют положительную мнимую часть. Пусть λ_i при $i = 1, \ldots, m$ - различные корни (2) с положительной мнимой частью и кратностями α_i, а μ_i $(i = 1, \ldots, k)$ − различные корни (2) с отрицательной мнимой частью и кратностями β_i. Имеем

$$\Im\lambda_i > 0, \quad i = 1, \ldots, m; \ \Im\mu_i < 0, \quad i = 1, \ldots, k, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i = n. \tag{3}$$

Решение уравнения (1) ищем в следующих функциональных классах.

Класс $B \subset C^{2n}(D^-)$ состоит из ограниченных в D^- функций, т.е. если $u \in B$, то $u \in C^{2n}(D^-)$ и

$$|u(x,y)| \le K, \quad (x,y) \in D^-, \tag{4}$$

где K — положительная постоянная, вообще говоря зависящая от u. В дальнейшем все постоянные, участвующие в оценках, будем обозначать K.

Класс $B_{n-1} \subset C^{2n}(D^-)$ состоит из функций в D^-, растущих не быстрее полинома степени $n-1$, т.е. если $u \in B_{n-1}$, то $u \in C^{2n}(D^-)$ и

$$|u(x,y)| \le K|z|^{n-1}, \quad (x,y) \in D^-. \tag{5}$$

Целью настоящей работы является построение общего решения уравнения (1) в классах B и B_{n-1}. В односвязных областях различного вида общее решение уравнения (1) было построено в [1-3]. В монографии [4] получена формула общего решения n-гармонического уравнения в области D^-.

В работе получены следующие результаты.

Теорема 1. *Общее решение уравнения (1) в классе B представляется в виде*

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1} y^j \Phi_{ij}(x+\lambda_i y) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{\beta_i-1} y^j \Psi_{ij}(x+\mu_i y) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-1} c_i \ln\frac{x+\lambda_i y}{x+\lambda_m y} + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \ln\frac{x+\mu_i y}{x+\mu_k y} + c_0, \quad (x,y) \in D^-, \tag{6}$$

где Φ_{ij} и Ψ_{ij} — произвольные функции, аналитические в областях $D(\lambda_i) = \{x+\lambda_i y | (x,y) \in D^-\}$ и $D(\mu_i) = \{x+\mu_i y | (x,y) \in D^-\}$ соответственно, удовлетворяющие условиям

$$|\Phi_{i0}(x+\lambda_i y)| \le K|z|^{-1}, \quad |\Phi_{ij}(x+\lambda_i y)| \le K|z|^{-j}, \quad i=1,\ldots,m, \quad j=1,\ldots,\alpha_j-1;$$

$$|\Psi_{i0}(x+\mu_i y)| \le K|z|^{-1}, \; |\Psi_{ij}(x+\mu_i y)| \le K|z|^{-j}, \; i=1,\ldots,k, \; j=1,\ldots,\beta_j-1 \tag{7}$$

при $z = x+iy \in D^-$, а c_0, c_i при $i=1,\ldots,m$ и d_i при $i=1,\ldots,k$ — произвольные комплексные постоянные.

Теорема 2. *Общее решение уравнения (1) в классе B_{n-1} представляется в виде*

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1} y^j \Phi_{ij}(x+\lambda_i y) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{\beta_i-1} y^j \Psi_{ij}(x+\mu_i y) + P_{n-1}(x,y) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1} y^j P^i_{n-2-j}(x+\lambda_i y)\ln(x+\lambda_i y) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{\beta_i-1} y^j Q^i_{n-2-j}(x+\mu_i y)\ln(x+\mu_i y), \tag{8}$$

$$(x, y) \in D^-,$$

где Φ_{ij} и Ψ_{ij} — произвольные функции, аналитические в областях $D(\lambda_i)$ и $D(\mu_i)$ соответственно, при $z = x + iy \in D^-$ удовлетворяющие условиям

$$|\Phi_{ij}(x + \lambda_i y)| \leq K|z|^{-1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, \alpha_j - 1;$$

$$|\Psi_{ij}(x + \mu_i y)| \leq K|z|^{-1}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, \beta_j - 1. \tag{9}$$

Функция P_{n-1} — произвольный многочлен от двух переменных степени не выше $n-1$, а P^i_{n-2-j} и Q^i_{n-2-j} — произвольные многочлены от одной переменной степени не выше $n - 2 - j$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} y^j P^i_{n-2-j}(x + \lambda_i y) - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\beta_i - 1} y^j Q^i_{n-2-j}(x + \mu_i y) = 0, \quad (x, y) \in D^-. \tag{10}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $\Gamma_0 = \{(x, y) : x > 0,\ y = 0\}$ положительная полуось оси абсцисс и $D_0 = D^- \backslash \Gamma_0$. Известно [1], что в односвязной области D_0 общее решение (1) представляется в виде

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} y^j \varphi_{ij}(x + \lambda_i y) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\beta_i - 1} y^j \psi_{ij}(x + \mu_i y), \quad (x, y) \in D_0, \tag{11}$$

где φ_{ij} и ψ_{ij} — произвольные функции, аналитические в областях $D_0(\lambda_i) = \{x + \lambda_i y | (x, y) \in D_0\}$ и $D_0(\mu_i) = \{x + \mu_i y | (x, y) \in D_0\}$ соответственно.

Применяя оператор

$$L_{2n-\alpha_1} = \prod_{i=2}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_i \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\beta_i} \tag{12}$$

к функции u, получим

$$L_{2n-\alpha_1} u = w_0 (x + \lambda_1 y) + y w_1 (x + \lambda_1 y) + \dots + y^{\alpha_1 - 1} w_{\alpha_1 - 1} (x + \lambda_1 y), \tag{13}$$

где

$$w_l (x + \lambda_1 y) = \sum_{j=1}^{\alpha_1 - l} c_{jl} \varphi^{(2n-\alpha_1-j+1)}_{1,l+j-1} (x + \lambda_1 y), \quad l = 0, \dots, \alpha_1 - 1. \tag{14}$$

Здесь c_{jl} — комплексные постоянные, $c_{1l} \neq 0$ при $l = 0, \dots, \alpha_1 - 1$.

Пусть $D_R = \{(x, y) : |z| > R > 1\}$, $D_{0R} = D_R \backslash \Gamma_0$. Известно ([5], с. 161), что если u является решением уравнения (1) и удовлетворяет условию (3), то

$$\left| \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}(x, y) \right| \leq K|z|^{-p-q}, \quad p + q \geq 0, \quad z \in D_R. \tag{15}$$

Докажем, что функции w_l аналитичны в области $D(\lambda_1)$ и удовлетворяют оценке

$$|w_l(x+\lambda_1 y)| \leq K|z|^{-2n+\alpha_1-l}, \quad l=0,\ldots,\alpha_1-1, \quad z\in D_R. \tag{16}$$

Пусть $L_{\alpha_1-p} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_1-p}$, $p=1,\ldots,\alpha_1-1$. Из (13) следует, что

$$L_{\alpha_1-1}L_{2n-\alpha_1}u(x,y) = (\alpha_1-1)!w_{\alpha_1-1}(x+\lambda_1 y), \quad (x,y)\in D_{0R},$$

и так как левая часть последнего равенства непрерывна в D^-, то функция w_{α_1-1} аналитична в $D(\lambda_1)$. Используя оценку (15), получаем

$$|w_{\alpha_1-1}(x+\lambda_1 y)| \leq K|z|^{-2n+1}, \quad z\in D_R. \tag{17}$$

Далее,

$$L_{\alpha_1-2}(L_{2n-\alpha_1}u(x,y) - y^{\alpha_1-1}w_{\alpha_1-1}(x+\lambda_1 y)) = (\alpha_1-2)!w_{\alpha_1-2}(x+\lambda_1 y)$$

и так как левая часть непрерывна в D^-, то функция w_{α_1-2} аналитична в $D(\lambda_1)$. Учитывая (15) и (17), получаем оценку

$$|w_{\alpha_1-2}(x+\lambda_1 y)| \leq K|z|^{-2n+2}, \quad z\in D_R.$$

Продолжая аналогично, доказываем аналитичность функций w_l в $D(\lambda_1)$, а также оценку (16).

Далее, решая систему (14) и используя оценку (16), получим:

$$\varphi_{10}(\zeta) = c_1 \ln\zeta + P_{2n-2}(\zeta) + \Phi_{10}(\zeta),\ \varphi_{1j}(\zeta) = P_{2n-2-j}(\zeta) + \Phi_{1j}(\zeta),\ j=1,\ldots,\alpha_1-1, \tag{18}$$

где функции Φ_{1j} аналитичны в $D(\lambda_1)$ и удовлетворяют оценке (7), а P_r — многочлены степени r.

После аналогичных рассуждений для других корней получим представления вида (18) для всех функций φ_{ij} и ψ_{ij}. Подставляя эти выражения в (11), представляем решение u в виде

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1} y^j \Phi_{ij}(x+\lambda_i y) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{\beta_i-1} y^j \Psi_{ij}(x+\mu_i y) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} c_i \ln(x+\lambda_i y) + \sum_{i=1}^{k} d_i \ln(x+\mu_i y) + P_{2n-2}(x,y), \quad (x,y)\in D_0. \tag{19}$$

где Φ_{ij} и Ψ_{ij} — аналитические функции в $D(\lambda_i)$ и $D(\mu_i)$ соответственно, удовлетворяющие условию (7), c_j и d_j — комплексные постоянные, а P_{2n-2}

— многочлен от двух переменных степени $2n-2$. Из условия (4) следует, что $P_{2n-2}(x,y) \equiv c_0 = \text{const}$, и

$$\sum_{i=1}^{m} c_i + \sum_{i=1}^{k} d_i = 0. \tag{20}$$

Так как функция u непрерывна на прямой Γ_0, необходимо выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m} c_i - \sum_{i=1}^{k} d_i = 0. \tag{21}$$

Из (20) и (21) получим $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} d_i = 0$. Выражая из этих равенств c_m и d_k и подставляя в (19), завершаем доказательство. Теорема 1 доказана.□

Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, поэтому отметим только основные этапы доказательства, опуская детали. Общее решение уравнения (1) в области D_0 представляется в виде (11). Применяя оператор (12) к функции u, получаем соотношения (13), (14). Так как выполняется оценка (5), то аналогично (15) имеем

$$\left|\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p \partial y^q}(x,y)\right| \leq K|z|^{n-1-p-q}, \quad p+q \geq 0, \quad z \in D_R. \tag{22}$$

Функции w_l из (13) аналитичны в области $D(\lambda_1)$ и удовлетворяют оценке:

$$|w_l(x+\lambda_1 y)| \leq K|z|^{-n-1+\alpha_1-l}, \quad l = 0,\ldots,\alpha_1-1, \quad z \in D_R. \tag{23}$$

Из (14) и (23) получим:

$$\varphi_{1l}(\zeta) = P_{n-l-1}(\zeta)\ln\zeta + P_{2n-l-2}(\zeta) + \Phi_{1l}(\zeta), \quad l = 0,\ldots,\alpha_1-1, \;\; \zeta \in D_0(\lambda_1), \tag{24}$$

где функции Φ_{1l} аналитичны в $D(\lambda_1)$ и удовлетворяют оценке (9). Аналогичные представления имеем для функций φ_{ij} и ψ_{ij}. Подставляя полученные формулы в (11), имеем:

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1} y^j \Phi_{ij}(x+\lambda_i y) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{\beta_i-1} y^j \Psi_{ij}(x+\mu_i y) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1} y^j P_{i,n-1-j}(x+\lambda_i y)\ln(x+\lambda_i y) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{\beta_i-1} y^j Q_{i,n-1-j}\ln(x+\mu_i y) + \tag{25}$$

$$+ P_{2n-2}(x,y), \quad (x,y) \in D_0,$$

где Φ_{ij} и Ψ_{ij} – аналитические функции в $D(\lambda_i)$ и $D(\mu_i)$ соответственно, удовлетворяющие условию (9), P_{2n-2} – многочлен от двух переменных степени $2n-2$, а $P_{i,n-1-j}$ и $Q_{i,n-1-j}$ – многочлены от одной переменной степени $n-1-j$. Так как функция u принадлежит классу B_{n-1}, из (24) получим:

$$P_{2n-2} \equiv P_{n-1}, \quad P_{i,n-1-j} \equiv P_{i,n-2-j}, \quad Q_{i,n-1-j} \equiv Q_{i,n-2-j},$$

а также равенство (10). Теорема 2 доказана.□

Институт математики НАН РА

А. Я. Саакян

Общее решение правильно эллиптического уравнения высокого порядка вне круга

В работе получена формула общего решения правильно эллиптического уравнения высокого порядка вне круга.

Ա. Յա. Սահակյան

Միավոր շրջանից դուրս բարձր կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման ընհանուր լուծումը

Աշխատանքում ստացված է միավոր շրջանից դուրս բարձր կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման ընդհանուր լուծման բանաձևը:

A. Y. Sahakyan

General Solution of the Higher Order Properly Elliptic Equation in Exterior of the Unit Disk

The formula of the general solution of the higher order properly elliptic equation in exterior of the unit disk was found in the work.

Литература

1. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М. Наука. 1966. 204 с.

2. *Tovmasyan N.E.* Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. World Scientific. Singapore. 1998.

3. *Бабаян А.О.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2003. Т. 38. N6. С. 39-48.

4. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М. Гостехиздат. 1948. 364 с.

5. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. М. Наука. 1965. 328 с.