ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том 107 2007 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.957

О. А. Бабаян

О параметрическом представлении траекторий полета летательного аппарата

(Представлено чл.-кор. НАН РА Н.Е. Товмасяном 20/VII 2007)

Ключевые слова: *траектория полета, летательный аппарат переменной массы, параметрическое представление*

В работе рассматривается движение летательного аппарата (ЛА) без крыльев под воздействием реактивной силы $\vec{F}_R$, силы сопротивления окружающей среды $\vec{F}_r$ и силы притяжения Земли $\vec{F}_g$

$$\vec{F_g} = m\vec{g}, \quad \vec{F_R} = -k\frac{dm(t)}{dt}\frac{\vec{V}}{V}, \quad \vec{F_r} = -\kappa\vec{V},$$

где $m(t)$ — масса ЛА в момент времени t, $\vec{V}(t) = (V_1(t), V_2(t))$ — скорость ЛА в момент времени t, $V(t) = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$; k — постоянный коэффициент реактивной силы, κ — коэффициент сопротивления среды, вообще говоря зависящий от V. Предполагаем, что движение ЛА происходит около земной поверхности и зона полета мала по сравнению с радиусом Земли, поэтому ускорение силы тяжести можем считать постоянным вектором $\vec{g} = (0, -g)$.

Пусть начало координатной системы находится на поверхности Земли и положительное направление оси Oy направлено вертикально вверх. Движение ЛА происходит в плоскости (x, y) и описывается уравнением Мещерского [1]:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F_g} + \vec{F_R} + \vec{F_r}. \tag{1}$$

Рассматривается полет летательного аппарата от точки $(0,0)$ до точки (x_0, y_0) по траектории $y = f(x), 0 \le x \le x_0$. Заданы масса летательного аппарата в конечной точке полета и его начальная скорость:

$$m(x_0) = m_0; \quad V(0) = V_0. \tag{2}$$

Переходя к переменной x и записывая (1) в координатах, получим следующую систему [2]:

$$\begin{cases} m\dfrac{dV_1}{dx} = -\dfrac{k}{V}\dfrac{dm}{dx}V_1 - \kappa, & 0 \le x \le x_0 \\ mV_1\dfrac{dV_2}{dx} = -\dfrac{k}{V}\dfrac{dm}{dx}V_1V_2 - \kappa V_2 - gm, & 0 \le x \le x_0 \end{cases} \tag{3}$$

с краевыми условиями (2). Используя равенство $V_2 = f'(x)V_1$, в [2] получена

Теорема 1. *Задача (2)-(3) разрешима для любой функции* κ *тогда и только тогда, когда*

$$f''(x) < 0, \quad f'''(x) \ge 0, \quad 0 \le x \le x_0, \tag{4}$$

$$-\frac{1 + (f'(0))^2}{f''(0)} = \frac{V_0^2}{g}. \tag{5}$$

В работах [2] и [3], используя теорему 1, получено следующее интегральное представление допустимых траекторий.

Теорема 2. *Функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям (4)-(5) тогда и только тогда, когда она представляется в виде*

$$f(x) = \frac{y_0}{x_0}x + kx_0 f_0\left(\frac{x}{x_0}\right), \quad 0 \le x \le x_0, \tag{6}$$

где

$$f_0(x) = x - bx^2 + \frac{\rho}{\|\omega\|}\int_0^x \omega(t)(x-t)^2 dt, \quad 0 \le x \le 1; \tag{7}$$

$$k = k_{1,2} = b\gamma - \frac{y_0}{x_0} \pm \sqrt{b\gamma\left(b\gamma - 2\frac{y_0}{x_0}\right) - 1} > 0, \quad \gamma = \frac{V_0^2}{gx_0}; \tag{8}$$

$$b = 1 + \rho\frac{L(\omega)}{\|\omega\|}, \tag{9}$$

где $\omega(x)$ *— произвольная неотрицательная функция из класса* $C[0,1]$, *удовлетворяющая условию*

$$\|\omega\|\left[\frac{1}{\gamma}\left(\sqrt{\frac{y_0^2}{x_0^2} + 1} + \frac{y_0}{x_0}\right) - 1\right] < L(\omega), \tag{10}$$

а ρ *— произвольное число, удовлетворяющее неравенствам*

$$\max\left[0,\ \left(\frac{1}{\gamma}\left(\sqrt{\frac{y_0^2}{x_0^2} + 1} + \frac{y_0}{x_0}\right) - 1\right)\frac{\|\omega\|}{L(\omega)}\right] \le \rho < 1. \tag{11}$$

Здесь функционал L определяется как

$$L(\omega) = \int_0^1 (1-x)^2 \omega(x) dx, \tag{12}$$

а норма ω - формулой

$$\|\omega\| = \int_0^1 (2-x) x \omega(x) dx. \tag{13}$$

Для эффективного определения оптимальных параметров полета предпочтительнее параметрическое представление траекторий. Поэтому представляет интерес получить параметрическое представление траекторий, определяющихся функциями заданного класса. Подобная задача для случая, когда $f = P_3$ - полином третьей степени, рассмотрена в [4]. В настоящей работе рассматривается случай, когда $f = P_n$ - многочлен порядка n. В работе [2] доказано, что $\omega = 0.5 f_0'''$. Таким образом, если функция $f \in \{P_n\}$, то $\omega \in \{P_{n-3}\}$ является неотрицательным не равным тождественно нулю полиномом порядка $n-3$. Соответственно, функционал L будем в дальнейшем обозначать L_{n-3}. Наша задача — определить значения параметров таких траекторий из $\{P_n\}$, по которым возможно осуществить полет из точки $(0,0)$ в точку (x_0, y_0).

В дальнейшем будем предполагать, что точка (x_0, y_0) находится в области досягаемости по траекториям рассматриваемого класса. Для класса многочленов n-ой степени эта область описана в [2].

Итак, пусть $\omega \in \{P_m\}, m = n-3$ и $\omega(x) \geq 0, x \in [0,1]$. Совершая замену переменной $x = \frac{t+1}{2}$, получим функцию $\omega_1(t) = \omega\left(\frac{t+1}{2}\right)$ такую, что $\omega_1(t) \geq 0, t \in [-1;1]$; $\omega_1 \in \{P_m\}$. Согласно теореме Лукача [5] имеет место следующее представление:

$$\omega_1(t) = (A(t))^2 + (1-t^2)(B(t))^2 \quad \text{при четных } m, \tag{14}$$

$$\omega_1(t) = (1+t)(Q(t))^2 + (1-t)(S(t))^2 \quad \text{при нечетных } m, \tag{15}$$

где A, B, Q и S — произвольные многочлены степени

$$\deg A \leq \frac{m}{2}, \quad \deg B \leq \frac{m-2}{2}, \quad \deg Q \leq \frac{m-1}{2}, \quad \deg S \leq \frac{m-1}{2}.$$

Пусть

$$A(t) = \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} a_i t^i; \quad B(t) = \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} b_i t^i, \quad b_{\frac{m}{2}} = 0; \quad Q(t) = \sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} q_i t^i; \quad S(t) = \sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} s_i t^i. \tag{16}$$

Отметим, что так как $\omega \neq 0$, в силу линейности функционала L_{n-3} вместо функции ω в формулах (7) и (9) можно рассматривать нормированную функцию $\frac{\omega}{\|\omega\|}$, поэтому, не умаляя общности, можно считать, что в (16)

$$\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} \left(a_i^2 + b_i^2\right) = 1, \quad \sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} \left(q_i^2 + s_i^2\right) = 1. \tag{17}$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$\omega(x) = (A(2x-1))^2 + \left(1 - (2x-1)^2\right)(B(2x-1))^2 \quad \text{при четных } m, \tag{18}$$

$$\omega(x) = 2x(Q(2x-1))^2 + 2(1-x)(S(2x-1))^2 \quad \text{при нечетных } m. \tag{19}$$

Обозначим

$$\alpha = \frac{1}{\gamma}\left(\sqrt{\frac{y_0^2}{x_0^2} + 1} + \frac{y_0}{x_0}\right) - 1.$$

Пусть $\|L_{n-3}\|$ — норма функционала L_{n-3} в классе функций $\{P_{n-3}\}$ с нормой (13). Ясно, что $\|L_{n-3}\|$ зависит от n. Пусть $n \geq 3$ и $\omega_0(x) = (1-x)^{n-3}$. Тогда

$$\frac{L_{n-3}(\omega_0)}{\|\omega_0\|} = \frac{n-2}{2}.$$

Это означает, что

$$\|L_{n-3}\| \geq \frac{n-2}{2}, \quad n \geq 3. \tag{20}$$

В [2] доказано, что при $n = 3, 4$ в этом неравенстве имеет место равенство.

Из условия (10) следует, что полет по траектории $y = f(x)$, где f — полином порядка не выше n, из точки $(0,0)$ до точки (x_0, y_0) возможен тогда и только тогда, когда

$$\alpha < \|L_{n-3}\|.$$

Учитывая (20), заметим, что всегда существует n, при котором это неравенство имеет место. В дальнейшем будем предполагать, что n настолько большое, что

$$\alpha < \frac{n-2}{2}. \tag{21}$$

Ясно, что условие (21) достаточно для осуществления полета из точки $(0,0)$ до точки (x_0, y_0).

Условие (10) записывается в виде

$$\alpha\|\omega\| - L_{n-3}(\omega) < 0. \tag{22}$$

Легко видеть, что при $\alpha \leq 0$ условие (22) всегда выполняется. Пусть $\alpha > 0$. Используя определения (12) и (13) и совершая замену переменной $x = \frac{t+1}{2}$, получим

$$\alpha \|\omega\| - L_{n-3}(\omega) = \int\limits_0^1 \left(\alpha x (2-x) - (1-x)^2\right) \omega(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int\limits_{-1}^{1} \left((3\alpha - 1) + 2(\alpha+1)t - (\alpha+1)t^2\right) \omega_1(t)\, dt. \tag{23}$$

Для краткости обозначим $a_{ij} = a_i a_j$, $b_{ij} = b_i b_j$, $q_{ij} = q_i q_j$, $s_{ij} = s_i s_j$.

Пусть m — четное. Имеем

$$\omega_1(t) = \sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} a_{ij} t^{i+j} + \left(1 - t^2\right) \sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} b_{ij} t^{i+j} = \sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} \left[(a_{ij} + b_{ij})\, t^{i+j} - b_{ij} t^{i+j+2}\right].$$

Подставляя это выражение в (23), получаем

$$\alpha\|\omega\| - L_{n-3}(\omega) = \frac{1}{8} \int\limits_{-1}^{1} ((3\alpha - 1) + 2(\alpha+1)t - (\alpha+1)t^2) \sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} ((a_{ij} + b_{ij})t^{i+j} -$$

$$-b_{ij}t^{i+j+2})dt = \frac{1}{8} \sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} \int\limits_{-1}^{1} ((3\alpha-1)(a_{ij}+b_{ij})t^{i+j} + 2(\alpha+1)(a_{ij}+b_{ij})t^{i+j+1} -$$

$$-(\alpha+1)(a_{ij}+b_{ij})t^{i+j+2} - (3\alpha-1)b_{ij}t^{i+j+2} - 2(\alpha+1)b_{ij}t^{i+j+3} + (\alpha+1)b_{ij}t^{i+j+4})dt =$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} \int\limits_{-1}^{1} ((3\alpha-1)(a_{ij}+b_{ij})t^{i+j} + 2(\alpha+1)(a_{ij}+b_{ij})t^{i+j+1} - (4\alpha b_{ij} + (\alpha+1)c_{ij})t^{i+j+2} -$$

$$-2(\alpha+1)b_{ij}t^{i+j+3} + (\alpha+1)b_{ij}t^{i+j+4})dt =$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} \left[\frac{(3\alpha-1)(a_{ij}+b_{ij})}{i+j+1}\left(1 - (-1)^{i+j+1}\right) + \frac{2(\alpha+1)(a_{ij}+b_{ij})}{i+j+2}\left(1 - (-1)^{i+j+2}\right) - \right.$$

$$- \frac{4\alpha b_{ij} + (\alpha+1)a_{ij}}{i+j+3}\left(1 - (-1)^{i+j+3}\right) - \frac{2(\alpha+1)b_{ij}}{i+j+4}\left(1 - (-1)^{i+j+4}\right) +$$

$$\left. + \frac{(\alpha+1)b_{ij}}{i+j+5}\left(1 - (-1)^{i+j+5}\right)\right] < 0.$$

Группируя слагаемые, содержащие a_{ij} и b_{ij}, получаем следующее условие на коэффициенты a_{ij} и b_{ij}:

$$\sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}}\left[\left(\frac{3\alpha-1}{i+j+1}-\frac{\alpha+1}{i+j+3}\right)\lambda_{ij}+\frac{2(\alpha+1)(1-\lambda_{ij})}{(i+j+2)}\right]a_{ij}+$$
$$+\sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}}\left[\left(\frac{3\alpha-1}{i+j+1}-\frac{4\alpha}{i+j+3}+\frac{\alpha+1}{i+j+5}\right)\lambda_{ij}+\frac{4(\alpha+1)(1-\lambda_{ij})}{(i+j+2)(i+j+5)}\right]b_{ij}<0, \tag{24}$$

где $\lambda_{ij}=1$, когда $i+j$ — четное, и $\lambda_{ij}=0$, когда $i+j$ — нечетное.

При нечетных m, используя формулу (19) и представления (16), аналогично получаем условие на коэффициенты q_{ij} и s_{ij}:

$$\sum_{i,j=0}^{\frac{m-1}{2}}\left[\left(\frac{3\alpha-1}{i+j+1}+\frac{\alpha+1}{i+j+3}\right)\lambda_{ij}+\left(\frac{5\alpha-1}{i+j+2}-\frac{\alpha+1}{i+j+4}\right)(1-\lambda_{ij})\right]q_{ij}+$$
$$+\sum_{i,j=0}^{\frac{m-1}{2}}\left[\left(\frac{3\alpha-1}{i+j+1}-3\frac{\alpha+1}{i+j+3}\right)\lambda_{ij}+\left(\frac{3-\alpha}{i+j+2}+\frac{\alpha+1}{i+j+4}\right)(1-\lambda_{ij})\right]s_{ij}<0, \tag{25}$$

где λ_{ij} те же коэффициенты, что и в (24).

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. *Пусть f — многочлен порядка n. Функция f удовлетворяет условиям (4), (5) тогда и только тогда, когда она представляется в виде (6), где*
1) при $\alpha \le 0$ ω - произвольный многочлен степени $n-3$, определяемый формулой (18) при нечетном n и формулой (19) при четном n,
2) при $\alpha \le \frac{n-2}{2}$ ω - многочлен степени $n-3$, определяемый формулами (18) или (19), где при нечетных n коэффициенты многочленов A и B удовлетворяют неравенству (24), а при четных n коэффициенты многочленов Q и S удовлетворяют неравенству (25).
Во всех случаях коэффициенты многочленов A, B, Q, S удовлетворяют условиям (17).

Применим полученные результаты для случая, когда $f \in \{P_4\}$ — многочлен четвертого порядка. Итак, пусть $n=4$. Тогда $m=n-3=1$ и $\omega \in \{P_1\}$. Согласно (19) функция ω имеет вид

$$\omega(x)=2x\left(Q(2x-1)\right)^2+2(1-x)\left(S(2x-1)\right)^2,$$

где Q и S многочлены порядка $\frac{m-1}{2}=0$. Таким образом, обозначая $c=q_0^2$ и учитывая условие (17), получаем

$$\omega(x)=2cx+2(1-c)(1-x). \tag{26}$$

Учитывая, что $0 \leq c \leq 1$ и используя теорему 3, при $m = 1$ получаем следующую систему неравенств для определения c:

$$\begin{cases} 0 \leq c \leq 1 \\ 2(1+\alpha)c - 3(1-\alpha) \leq 0. \end{cases}$$

Решая эти неравенства, получаем

$$0 \leq c \leq 1 \quad \text{при} \quad \alpha < \frac{1}{5}, \tag{27}$$

$$0 \leq c \leq \frac{3(1-\alpha)}{2(1+\alpha)} \quad \text{при} \ \frac{1}{5} \leq \alpha < 1. \tag{28}$$

Подставляя (26) в (12) и (13), получаем

$$\frac{\|\omega\|}{L(\omega)} = \frac{3+2c}{3-2c}.$$

Суммируя вышеизложенное, получаем следующую теорему:

Теорема 4. *Пусть $\alpha < 1$, а траектория f — многочлен четвертого порядка. Полет по такой траектории возможен тогда и только тогда, когда f представляется в виде (6), где ω — многочлен, определяемый формулой (26), c удовлетворяет неравенствам (27), (28), ρ удовлетворяет неравенству*

$$\max\left[0, \alpha\frac{3+2c}{3-2c}\right] \leq \rho < 1,$$

а k определяется формулой (8), где $b = 1 + \rho\dfrac{3-2c}{3+2c}$.

Государственный инженерный университет Армении

О. А. Бабаян

О параметрическом представлении траекторий полета летательного аппарата

В работе исследуется движение летательного аппарата без крыльев по полиномиальной траектории под воздействием реактивной силы, силы сопротивления окружающей среды и силы притяжения Земли. Получено параметрическое представление возможных траекторий полета от начала координат до заданной точки.

Հ. Ա. Բաբայան

Թռչող սարքի հետագծերի պարամետրական ներկայացման մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է թռչող սարքի շարժումը ռեակտիվ ուժի, միջավայրի դիմադրության և Երկրի ձգողության ուժերի համատեղ ազդեցության տակ: Ստացված է կոորդինատների սկզբնակետից մինչև տրված կետը թռիչքի հնարավոր հետագծերի պարամետրական ներկայացումը:

H. A. Babayan

On Parametrical Representation of the Aircraft Flight Trajectories

The motion of the wingless aircraft by the polynomial trajectory under the simultaneous action of the reactive force, medium resistance force and gravity force of the Earth is considered. The parametrical representation of the possible flight trajectories from the origin to the given point is obtained.

Литература

1. *Дмитриевский А.А.* Внешняя баллистика. М. Машиностроение. 1979. 479 с.

2. *Tovmasyan N.E.* - NATO Science series, Series II. Kluwer Academic Publishers. 2004. V.147. P. 347-364.

3. *Бабаян О.А.* - Математика в высшей школе. Ереван. 2005. Т. 1. N4. С. 8-15.

4. *Бабаян А.О.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2006. Т. 41. N5. С. 80-85.

5. *Szego G.* Orthogonal polynomials. Published by American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. 1939. 440 p.