ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր 107 2007 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539.3: 624

Л. А. Мовсисян

Еще раз о сейсмической защите сооружений

(Представлено академиком Л.А. Агаловяном 16/IV 2007)

Ключевые слова: *дискретная система, сейсмическая сила, оптимизация, сейсмический удар, форма колебаний*

В работе [1] на примере дискретной системы (сооружения моделируются как системы с сосредоточенными массами) был показан способ уменьшения или устранения перемещений, вызванных вследствие сейсмического воздействия, путем применения внешних сил, приложенных в точках сосредоточенных масс. Такая задача имеет единственное решение, если число таких точек и число действующих сил одинаковы. Однако если число последних больше, чем целевых точек, то возникает возможность осуществить это оптимальным образом. Что понимать под оптимальностью, будет видно из дальнейшего изложения.

1. При совместном воздействии сейсмических и внешних сил суммарная сила в каждой точке для системы с n степенью свободы определится как

$$S_k = m_k \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \int_0^t (\eta_{ki} x_0'' - \eta_{ki}^* C_{ji} F_j) \sin \omega_i (t-\tau) d\tau. \tag{1.1}$$

Обозначения обычные [1], в том числе

$$\eta_{ki} = \eta_{ki}^* \sum_{j=1}^{n} C_{ji} m_j, \qquad \eta_{ki}^* = \frac{C_{ki}}{\sum\limits_{j=1}^{n} C_{ji}^2 m_j},$$

F_j - внешне активные силы.

Вопрос ставится следующим образом: в некоторых определенных точках $m < n$ вследствие приложенных сил F_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ добиться того, чтобы

$$S_k = \alpha_k S_k^{(0)} = \alpha_k S_k(F_j = 0), \ \alpha_k \leq 1 \tag{1.2}$$

в некотором интервале времени $0 \leq t \leq T$ и чтобы при этом приложенные силы удовлетворяли некоторому условию оптимальности, в частности, чтобы функционал

$$J = \int\limits_0^T \sum_{j=1}^m F_j^2 dt \tag{1.3}$$

был минимум в этом интервале.

Уравнения (1.2) в развернутом виде будут иметь вид

$$(1 - \alpha_k) \sum_{i=1}^n \omega_i \eta_{ki} \int\limits_0^T x_0''(\tau) \sin \omega_i (T - \tau) d\tau = \sum_{i,j=1}^n \omega_i \eta_{ki}^* C_{ij} \int\limits_0^T F_j(\tau) \sin \omega_i (T - \tau) d\tau. \tag{1.4}$$

Таких уравнений имеем m. Сформулированная задача - типичная изопериметрическая задача вариационного исчисления. Для этого составим функцию

$$\Phi = \sum_{j=1}^n F_j^2 + \sum_{k=1}^m \lambda_k \sum_{i,j=1}^n \omega_i \eta_{ki}^* C_{ij} F_j \sin \omega_i (T - \tau), \tag{1.5}$$

где λ_k - множители Лагранжа.

Условие минимума (1.5) для неизвестных F_j дает

$$2F_j + \sum_{k=1}^m \lambda_k \sum_{i=1}^n \omega_i \eta_{ki}^* C_{ji} \sin \omega_i (T - \tau) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в систему (1.4) для определения множителей λ_k, получим систему из m уравнений с m неизвестными λ_k. По определенным λ_k из (1.6) находятся F_j, которые обеспечивают минимум функционала (1.3).

В качестве примера рассмотрим систему с двумя степенями свободы, которая подвергается сейсмическому удару. Подбором F_j $(j = 1, 2)$ хотим иметь в точке 1 суммарную силу на α меньшую, чем сейсмическая. Тогда условие типа (1.3) будет

$$(1 - \alpha) I \sum_{i=1}^2 \omega_i \eta_{1i} \sin \omega_i T = \sum_{i,j=1}^2 \omega_i \eta_{1i}^* C_{ij} \int\limits_0^T F_j \sin \omega_i (T - \tau) d\tau, \tag{1.7}$$

где

$$I = \int\limits_0^T x_0''(\tau) d\tau.$$

Силы определяются как

$$F_j = \frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{2} C_{jp}\eta_{1p}\sin\omega_1(T-\tau), \tag{1.8}$$

а множитель λ будет

$$\lambda = -4(1-\alpha)I\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{2}\omega_i\eta_{1i}\sin\omega_i T}{\sum\limits_{i,j,p=1}\omega_i\omega_p\eta_{1i}^{*}C_{jp}C_{ji}a_{ip}\eta_{1p}^{*}}, \tag{1.9}$$

$$a_{ip} = \begin{cases} \dfrac{\sin(\omega_p-\omega_i)T}{\omega_p-\omega_i} - \dfrac{\sin(\omega_p+\omega_i)T}{\omega_p+\omega_i}, & i \neq p, \\ T - \dfrac{\sin 2\omega_p T}{2\omega_p}, & i = p. \end{cases} \tag{1.10}$$

2. В [1] предлагался способ для устранения или уменьшения наиболее опасных форм колебаний. Теперь можно и в этом вопросе применить оптимальный принцип.

Как известно, формы колебаний (обобщенные координаты) определяются

$$x_k = \frac{1}{\omega_k\sum\limits_{j=1}^{n} m_j C_{jk}^2}\int_0^t \sum_{j=1}^{n} C_{jk}(F_j - m_j x_0'')\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau. \tag{2.1}$$

Вопрос оптимальности можно ставить двояким образом: некоторые формы уменьшить или отстранить для всего интервала движения системы или это сделать в конечном интервале времени.

В первом случае должны иметь

$$\sum_{j=1}^{n} C_{jk}F_j(t) = (1-\alpha_n)x_0''(t)\sum_{j=1}^{n} C_{jk}m_j,\ k = m < n \tag{2.2}$$

при условии минимальности функции

$$J_1 = \sum_{j=1}^{n} F_j^2. \tag{2.3}$$

Теперь, составляя функцию

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} F_j^2 + \sum_{p=1}^{m}\lambda_p\sum_{j=1}^{n} C_{jp}F_j, \tag{2.4}$$

для неизвестных F_j получим

$$F_j = -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m}\lambda_p C_{jp}, \tag{2.5}$$

а неизвестные λ_p (они уже функции от времени) определяются из

$$\sum_{j=1}^{n}\left[2(1-\alpha_k)m_j x_0'' y_2 + \sum_{p=1}^{m}\lambda_p C_{jp}\right] C_{jk} = 0. \tag{2.6}$$

При второй постановке вопроса имеем задачу типа (1.3)-(1.6). Здесь уже соответствующими (1.3), (1.5) и (1.6) будут

$$\int_0^T \sum_{j=1}^{n} C_{jk}F_j \sin\omega_k(T-\tau)d\tau = (1-\alpha_k)\int_0^T \sum_{j=1}^{n} C_{jk}m_j x_0'' \sin\omega_k(T-\tau)d\tau,$$

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} F_j^2 + \sum_{p=1}^{m}\lambda_p \sum_{j=1}^{n} C_{jk}F_j \sin\omega_k(T-\tau),$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\lambda_p C_{jk}a_{pk} = 4(\alpha_k - 1)\int_0^T \sum_{j=1}^{n} C_{jk}m_j x_0'' \sin\omega_k(T-\tau)d\tau.$$

Как и в п.1, для конкретности рассмотрим систему с двумя степенями свободы.

Тогда для первого варианта

$$F_j = C_{j1}\frac{\sum\limits_{i=1}^{2} m_i C_{j1}}{\sum\limits_{i=1}^{2} C_{i1}^2}x_0'', \quad j = 1, 2, \tag{2.7}$$

а для второго варианта

$$F_j = -\frac{1}{2}\lambda_1 C_{j1}\sin\omega_1(T-\tau),$$

$$\lambda_1 = \frac{4(\alpha_1 - 1)}{a_{11}\sum\limits_{j=1}^{n} C_{jk}}\int_0^T \sum_{j=1}^{2} C_{j1}m_j x_0'' \sin\omega_1(T-\tau)d\tau. \tag{2.8}$$

Подобные задачи можно рассматривать и для сплошных сред, в частности, для сооружений, которые моделируются как стержни.

3. В [2] было получено уравнение движения упругих колонн, т.е. стержня, работающего на сдвиг. В отличие от классического уравнения здесь учитывается изгибная деформация на сдвиг. Если сооружение моделировать как такой стержень, то уравнение его движения с учетом сейсмических и сосредоточенных сил $P_j(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$ выглядит как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma w = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} + \sum_{j=1}^{m} Q\delta(x - x_j). \tag{3.1}$$

Здесь x - безразмерная координата $0 \le x \le 1$, τ - безразмерное время $l\tau = at$, l - длина колонны, $a = \sqrt{A_{55}/\rho}$, $Q_j = P_j l^2 / F A_{55}$, F - площадь поперечного сечения. В отличие от классического уравнения в (3.1) учитывается форма поперечного сечения

$$\gamma = \frac{A_{11}}{A_{55}} \frac{Fl^2}{J},$$

где J - момент инерции сечения.

Принимая, что имеются нулевые начальные и следующие краевые условия:

$$x = 0, \quad w = 0,$$

$$x = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{3.2}$$

ищем решение (3.1) в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \mu_n x, \quad \mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}. \tag{3.3}$$

Тогда $w_n(t)$ будет

$$w_n(\tau) = \frac{2}{\omega_n} \int_0^{\tau} \left(\frac{1}{\mu_n} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} - \sum_{j=1}^{m} Q_j \sin \mu_n x_j \right) \sin \omega_n (\tau - \theta) d\theta, \tag{3.4}$$

$$\omega_n^2 = \mu_n^2 - \gamma.$$

Сдвигающее усилие определяется формулой

$$N = \frac{A_{55} F}{l} \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{3.5}$$

Все типы задач, изученных в предыдущих пунктах, можно рассматривать и здесь. Понятно, что, как и там, число требуемых условий должно быть меньше, чем количество действующих сил $P_j(t)$.

Например, если требуется в некотором интервале времени уменьшить влияние нескольких (k) форм колебаний, как в п.2, то должны иметь

$$\frac{(1-\alpha_k)}{\mu_n} \int_0^T \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} \sin \omega_n (T - \theta) d\theta = \int_0^T \sum_{j=1}^{m} Q_j \sin \mu_n x_j \sin \omega_n (T - \theta) d\theta \tag{3.6}$$

таких уравнений k, причем $k < m$.

Функции Φ и Q_j, обеспечивающие минимум функционала типа (1.3), следующие:

$$\Phi = \sum_{j=1}^{m} Q_j^2 + \sum_{k=1}^{m} \lambda_n \sum_{j=1}^{m} Q_j \sin \mu_k x_j \sin \omega_k (T - \theta),$$

$$2Q_j + \sum_{i=1}^{k} \lambda_j \sin \mu_i x_j \sin \omega_i (T - \theta), \tag{3.7}$$

а множители λ_k определяются из системы (3.6) по Q_j из (3.7).

Кстати, помимо минимизации функционала типа (1.3) по $P_j(t)$ можно еще раз провести минимизацию уже по точкам приложения сил.

Институт механики НАН РА

Л. А. Мовсисян

Еще раз о сейсмической защите сооружений

Рассматривается вопрос о сейсмозащите сооружений с помощью внешних сил в дискретной и сплошной постановках. Показано, что уменьшение сейсмических сил или форм колебаний можно осуществить с помощью внешних сосредоточенных сил. В случае, когда число этих сил больше, чем требуемые условия, это можно сделать оптимальным образом - минимизируя некоторый функционал.

Լ. Ա. Մովսիսյան

Դարձյալ կառուցվածքների սեյսմիկ պաշտպանության մասին

Դիտարկվում է դիսկրետ և հոծ միջավայրի դրվածքներով կառուցվածքների սեյսմիկ պաշտպանության հարցն արտաքին ուժերի օգնությամբ: Ցույց է տրվում, որ սեյսմիկ ուժերի կամ տատանման ձևերի թուլացումը կարելի է կատարել արտաքին ուժերի օգնությամբ: Այն դեպքում, երբ այդ ուժերի թիվն ավելի է, քան պահանջվող պայմանների թիվը, կարելի է այդ կատարել օպտիմալ ձևով՝ մինիմիզացնելով այդ ուժերից կախված որոշակի ֆունկցիոնալ:

L. A. Movsisyan

Again about Seismic Protection of Structures

In statement of discrete and continuous media the question of protection of structures on account of external forces is investigated. It is shown that by using of external forces one can decrease the value of seismical stresses of structures and the amplitude of vibrations form. In the case when the number of these external forces is more than number of demanded conditions one can do it by optimal realization of procedure of minimization of some functional.

Литература

1. *Мовсисян Л.А., Хачиян Э.Е.* - Известия НАН РА. Механика. 2003. Т. 56. N 3. С. 62-68.

2. *Мовсисян Л.А.* - ДНАН Армении. 2001. Т. 101. N 4. С. 330-335.