ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Volume 107 2007 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

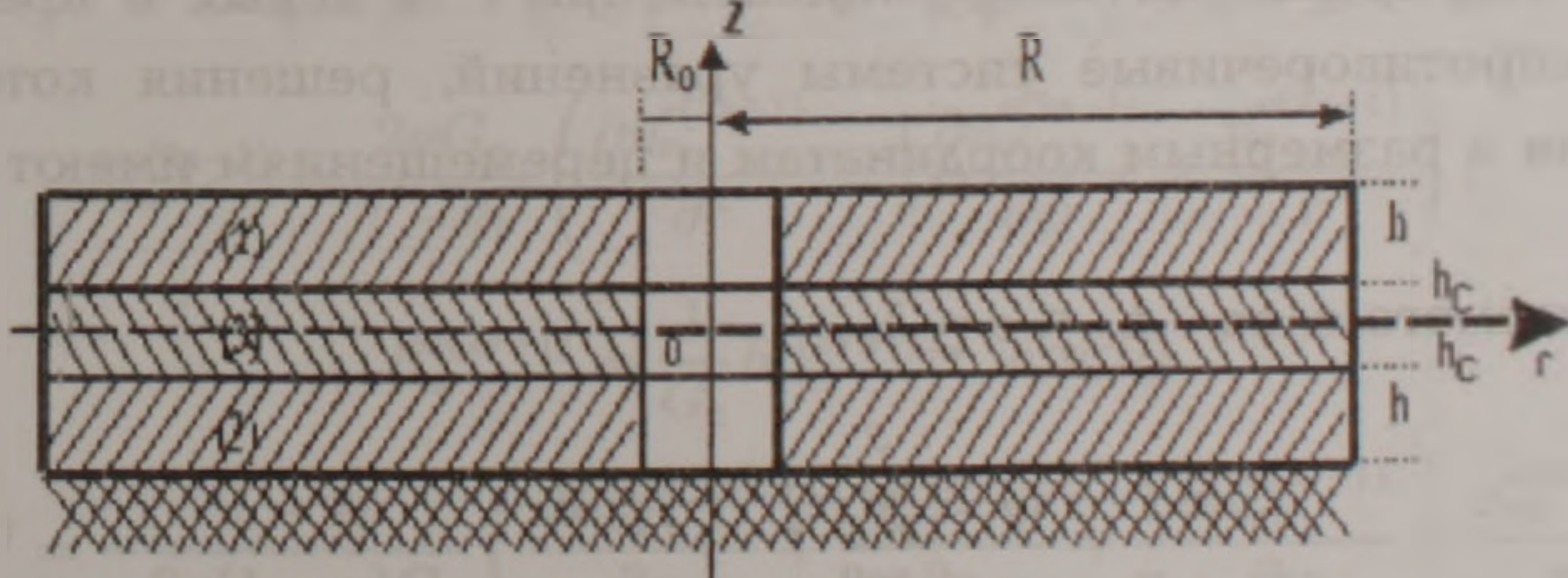
Р. С. Геворкян, Е. Г. Вирабян, С. Н. Базикян

Вынужденные колебания трехслойной круговой кольцевой пластины со сжимаемым средним и несжимаемыми крайними слоями

(Представлено академиком Л.А. Агаловяном 15/III 2007)

Ключевые слова: *динамические задачи, трехслойные пластины, пластины из сжимаемых и несжимаемых материалов, вынужденные колебания, дисперсионные уравнения частот собственных колебаний, резинометаллические сейсмоизоляторы*

1. Имеем трехслойную пластину, занимающую область $\Omega = \{r, \varphi, z : R_0 \leq r \leq R, |z| \leq h_c + h;\ H = \max\{h, h_c\} \ll l = \min\{R_0, R - R_0\}\}$. Слои $h_c \leq z \leq h_c + h$, $-h - h_c \leq z \leq -h_c$ из несжимаемого, а слой $|z| \leq h_c$ - из сжимаемого материалов (рисунок). Здесь и в дальнейшем величинам сжимаемого слоя приписан индекс "c".



Требуется определить амплитуды вынужденных колебаний, компоненты тензора напряжений и вектора перемещения, когда на лицевых поверхностях пакета заданы кинематические условия

$$u_j(r, \varphi, z = \pm(h_c + h), t) = u_j^{\pm}(r, \varphi) \exp(i\Omega t), \quad j = r, \varphi, z, \tag{1.1}$$

а между слоями выполняются условия полного контакта

$$u_j^{(i)}(r,\varphi,z=(2-i)h_c,t)=u_j^c(r,\varphi,z=(2-i)h_c),\quad i=1,3,$$

$$\sigma_{jz}^{(i)}(r,\varphi,z=(2-i)h_c,t)=\sigma_{jz}^c(r,\varphi,z=(2-i)h_c),\quad j=r,\varphi,z. \tag{1.2}$$

Для решения поставленной краевой задачи в динамических уравнениях теории упругости в цилиндрических координатах и в условиях несжимаемости все компоненты вектора перемещения и тензора напряжений представляем в виде [1,2]

$$\overline{Q}=Q(x,y,z)\exp(i\Omega t) \tag{1.3}$$

и переходим к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам [1-4]; в результате получаем сингулярно возмущенные геометрическим малым параметром ε системы уравнений для слоев из сжимаемых и несжимаемых материалов. Решение этих систем ищем в виде асимптотического разложения [1-4]

$$Q=\varepsilon^{\chi_Q}\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^s Q^{(s)}(\xi,\eta,\zeta), \tag{1.4}$$

где

$$\chi_\sigma=-1,\quad \chi_u=0 \tag{1.5}$$

для всех напряжений и перемещений сжимаемого слоя и

$$\chi_{\sigma_{rr}}=\chi_{\sigma_{\varphi\varphi}}=\chi_{\sigma_{zz}}=-3,\quad \chi_{\sigma_{r\varphi}}=\chi_{\sigma_{rz}}=\chi_{\sigma_{\varphi z}}=-2,\quad \chi_u=\chi_v=-1,\quad \chi_w=0 \tag{1.6}$$

для соответствующих величин слоев из несжимаемого материала.

Подставив (1.4) - (1.6) в полученные сингулярно возмущенные системы уравнений и приравнивая коэффициенты при ε^s в левых и правых частях, получим непротиворечивые системы уравнений, решения которых после возвращения к размерным координатам и перемещениям имеют следующий вид [1,2]:

а) для сжимаемого слоя $-h_c\le z\le h_c$

$$Q=\sum_{s=0}^{S}Q^{(s)}(r,\varphi,z),$$

$$u_r^{c(2s+1)}=M_u^{(2s+1)}\cos\alpha_u z+N_u^{(2s+1)}\sin\alpha_u z+J_u^{c(2s-1)}(z)-$$

$$-\frac{\alpha_w}{(1-2\nu)(\alpha_u^2-\alpha_w^2)}\left(\frac{\partial}{\partial r}N_w^{(2s)}\cos\alpha_w z-\frac{\partial}{\partial r}M_w^{(2s)}\sin\alpha_w z\right)$$

$$u_\varphi^{c(2s+1)}=M_\nu^{(2s+1)}\cos\alpha_\nu z+N_\nu^{(2s+1)}\sin\alpha_\nu z+J_\nu^{c(2s-1)}(z)-$$

$$-\frac{\alpha_w}{r(1-2\nu)(\alpha_u^2-\alpha_w^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}N_w^{(2s)}\cos\alpha_w z-\frac{\partial}{\partial\varphi}M_w^{(2s)}\sin\alpha_w z\right)$$

$$u_z^{c(2s)} = M_w^{(2s)} \cos\alpha_u z + N_w^{(2s)} \sin\alpha_u z + J_w^{c(2s-1)}(z),$$

$$\sigma_{rr}^{c(2s)} = \frac{2\nu G_c}{1-2\nu}\frac{\partial u_z^{c(2s)}}{\partial z} + R_{rr}^{c(2s-1)}(r,\varphi),$$

$$\sigma_{zz}^{c(2s)} = \frac{2(1-\nu)\alpha_w G_c}{1-2\nu}(N_w^{(2s)}\cos\alpha_u z - M_w^{(2s)}\sin\alpha_u z) + R_{zz}^{c(2s-1)} + \frac{2(1-\nu)G_c}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}J_w^{c(2s-1)}(z),$$

$$\sigma_{rz}^{c(2s+1)} = \alpha_u G_c(N_u^{(2s+1)}\cos\alpha_u z - M_u^{(2s+1)}\sin\alpha_u z) + G_c\frac{\partial}{\partial z}J_u^{c(2s-1)}(z) +$$

$$+\frac{(1-2\nu)\alpha_u^2 + 2\nu\alpha_w^2}{(1-2\nu)(\alpha_u^2-\alpha_w^2)}G_c\left(\frac{\partial}{\partial r}M_w^{(2s)}\cos\alpha_w z + \frac{\partial}{\partial r}N_w^{(2s)}\sin\alpha_w z\right) + G_c\frac{\partial}{\partial r}J_w^{c(2s-1)}(z),$$

$$\sigma_{\varphi c}^{c(2s+1)} = \alpha_\nu G_c(N_\nu^{(2s+1)}\cos\alpha_\nu z - M_\nu^{(2s+1)}\sin\alpha_\nu z) + \tag{1.7}$$

$$+\frac{(1-2\nu)\alpha_\nu^2 + 2\nu\alpha_w^2}{r(1-2\nu)(\alpha_\nu^2-\alpha_w^2)}G_c\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}M_w^{(2s)}\cos\alpha_w z + \frac{\partial}{\partial\varphi}N_w^{(2s)}\sin\alpha_w z\right) +$$

$$+ G_c\frac{\partial}{\partial z}J_\nu^{c(2s-1)}(z) + G_c\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}J_w^{c(2s-1)}(z),$$

$$\sigma_{r\varphi}^{c(2s)} = G_c\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r^{c(2s-1)}}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi^{c(2s-1)}}{\partial r} - \frac{u_\varphi^{c(2s-1)}}{r}\right),$$

$$R_{rz}^{c(2s-1)} = -\frac{\partial}{\partial r}R_{rr}^{c(2s-1)} - \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}^{c(2s-1)}}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}(R_{rr}^{c(2s-1)} - R_{\varphi\varphi}^{c(2s-1)}),$$

$$R_{\varphi z}^{c(2s-1)} = -\frac{\partial\sigma_{r\varphi}^{c(2s-1)}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial R_{\varphi\varphi}^{c(2s-1)}}{\partial\varphi} - \frac{2\sigma_{r\varphi}^{c(2s-1)}}{r},$$

$$R_{rr}^{c(2s-1)} = \frac{2(1-\nu)G_c}{1-2\nu}\frac{\partial u_r^{c(2s-1)}}{\partial r} + \frac{2\nu G_c}{1-2\nu}\left(\frac{u_r^{c(2s-1)}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^{c(2s-1)}}{\partial\varphi}\right),$$

$$R_{\varphi\varphi}^{c(2s-1)} = \frac{2(1-\nu)G_c}{1-2\nu}\left(\frac{u_r^{c(2s-1)}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^{c(2s-1)}}{\partial\varphi}\right) + \frac{2\nu G_c}{1-2\nu}\frac{\partial u_r^{c(2s-1)}}{\partial r},$$

$$R_{zz}^{c(2s-1)} = \frac{2\nu G_c}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_r^{c(2s-1)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^{c(2s-1)}}{\partial\varphi} + \frac{u_r^{c(2s-1)}}{r}\right),$$

$$R_u^{c(2s-1)} = \frac{1}{G_c}R_{rz}^{c(2s-1)}(r,\varphi;u,\nu),$$

$$R_w^{c(2s-1)} = -\frac{1-2\nu}{2\nu(1-\nu)G_c}\left(\frac{\partial R_{zz}^{c(2s-1)}}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_{rz}^{c(2s-1)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}^{c(2s-1)}}{\partial\varphi} + \frac{\sigma_{rz}^{c(2s-1)}}{r}\right),$$

$$J_u^{c(2s-1)} = \frac{1}{\alpha_u}\int_0^z R_u^{c(2s-1)}\sin\alpha_u(z-\tau)d\tau \quad (u,\nu,w),$$

$$\alpha_u = \alpha_\nu = \Omega\sqrt{\frac{\rho_c}{G_c}}, \quad \alpha_w = \Omega\sqrt{\frac{(1-2\nu)\rho_c}{2(1-\nu)G_c}};$$

б) для несжимаемых слоев $h_c \le z \le h_c + h$, $h_c \le z \le h_c + h$

$$\sigma_{zz}^{(2s)} = \sigma_{zz^0}^{(2s)} + \sigma_{zz^*}^{(2s-2)}, \quad \sigma_{rr}^{(2s)} = \sigma_{zz^0}^{(2s)} + \sigma_{rz^*}^{(2s-2)}\ (r, \varphi),$$

$$\sigma_{rz}^{(2s)} = \beta G (B_u^{(2s)} \cos \beta z - A_u^{(2s)} \sin \beta z) + R_{rz}^{(2s-2)},$$

$$\sigma_{\varphi z}^{(2s)} = \beta G (B_\nu^{(2s)} \cos \beta z - A_\nu^{(2s)} \sin \beta z) + R_{\varphi z}^{(2s-2)},$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(2s)} = G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(2s-2)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^{(2s-2)}}{\partial r} - \frac{u_\varphi^{(2s-2)}}{r} \right),$$

$$u_r^{(2s)} = A_u^{(2s)} \cos \beta z + B_u^{(2s)} \sin \beta z - \frac{1}{\Omega^2 \rho} \frac{\partial \sigma_{zz^0}^{(2s)}}{\partial r} + J_u^{(2s-2)}(z),$$

$$u_\varphi^{(2s)} = A_\nu^{(2s)} \cos \beta z + B_\nu^{(2s)} \sin \beta z - \frac{1}{\Omega^2 \rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{zz^0}^{(2s)}}{\partial \varphi} + J_\nu^{(2s-2)}(z),$$

$$u_z^{(2s)} = u_{z^0}^{(2s)} + \frac{z}{\Omega^2 \rho} \nabla^2 \sigma_{zz^0}^{(2s)} + u_{z^*}^{(2s)} - \tag{1.8}$$

$$- \frac{\sqrt{G}}{\Omega \sqrt{\rho}} \sin \beta z \left(\frac{\partial A_u^{(2s)}}{\partial r} + \frac{A_u^{(2s)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\nu^{(2s)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\sqrt{G}}{\Omega \sqrt{\rho}} \cos \beta z \left(\frac{\partial B_u^{(2s)}}{\partial r} + \frac{B_u^{(2s)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\nu^{(2s)}}{\partial \varphi} \right),$$

$$R_u^{(2s-2)} = -\frac{1}{G} \left(\frac{\partial \sigma_{rr^*}^{(2s-2)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(2s-2)}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr^*}^{(2s-2)} - \sigma_{\varphi\varphi^*}^{(2s-2)}}{r} \right),$$

$$R_\nu^{(2s-2)} = -\frac{1}{G} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi^*}^{(2s-2)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(2s-2)}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\varphi}^{(2s-2)}}{r} \right),$$

$$\sigma_{zz^*}^{(2s-2)} = - \int_0^z \left(\frac{\partial \sigma_{rz}^{(2s-2)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi c}^{(2s-2)}}{\partial \varphi} + \Omega^2 \rho u_z^{(2s-2)} \right) dz,$$

$$\sigma_{rr^*}^{(2s-2)} = \sigma_{zz^*}^{(2s-2)} + \frac{4G}{9} \frac{\partial u_r^{(2s-2)}}{\partial r} + \frac{2G}{9} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi^{(2s-2)}}{\partial \varphi} + \frac{u_r^{(2s-2)}}{r} \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi^*}^{(2s-2)} = \sigma_{zz^*}^{(2s-2)} + \frac{2G}{9} \frac{\partial u_r^{(2s-2)}}{\partial r} + \frac{4G}{9} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi^{(2s-2)}}{\partial \varphi} + \frac{u_r^{(2s-2)}}{r} \right),$$

$$u_{z^*}^{(2s-2)} = \frac{1}{\beta^2} \int_0^z \left(\frac{\partial R_u^{(2s-2)}}{\partial r} + \frac{R_u^{(2s-2)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_\nu^{(2s-2)}}{\partial \varphi} \right) [\cos \beta (z - \tau) - 1]\, d\tau,$$

$$R_{rz}^{(2s-2)} = G \frac{\partial u_z^{(2s-2)}}{\partial r} + G \frac{\partial}{\partial z} J_u^{(2s-2)}(z), \quad R_{\varphi z}^{(2s-2)} = G \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(2s-2)}}{\partial \varphi} + G \frac{\partial}{\partial z} J_\nu^{(2s-2)}(z),$$

$$J_u^{(2s-2)} = \frac{1}{\beta} \int_0^z R_u^{(2s-2)} \sin \beta (z - \tau) d\tau \ (u, \nu), \quad \beta = \Omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}.$$

Рекуррентные формулы (1.7), (1.8) для каждого шага итерации содержат 18 функций интегрирования: M_u, N_u (u, ν, w) для среднего сжимаемого слоя и $A_u^{(i)}$, $B_u^{(i)}$, (u,v), $\sigma_{zz}^{(i)}$, $u_z^{(i)}$, $i=1,3$ для крайних несжимаемых слоев. Они однозначно определяются из граничных условий (1.1) и (1.2).

2. Удовлетворив граничным условиям и условиям полного контакта, получаем

$$M_w^{(2s)} = \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)\alpha_w G_c \sin\alpha_w h_c}(\sigma_{zz^0}^{3(2s)} - \sigma_{zz^0}^{1(2s)}) + F_w^{1(2s-2)},$$

$$N_w^{(2s)} = \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)\alpha_w G_c \cos\alpha_w h_c}(\sigma_{zz^0}^{3(2s)} + \sigma_{zz^0}^{1(2s)}) + \Phi_w^{1(2s-2)} \tag{2.1}$$

$$F_w^{1(2s-2)} = \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)\alpha_w G_c \sin\alpha_w h_c}(\sigma_{zz^*}^{3(2s-2)}(z=-h_c) - \sigma_{zz^*}^{1(2s-2)}(z=h_c) +$$

$$+ R_{zz}^{c(2s-2)}(z=h_c) - R_{zz}^{c(2s-2)}(z=-h_c)),$$

$$\Phi_w^{1(2s-2)} = \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)\alpha_w G_c \cos\alpha_w h_c}(\sigma_{zz^*}^{3(2s-2)}(z=-h_c) + \sigma_{zz^*}^{1(2s-2)}(z=h_c) -$$

$$- R_{zz}^{c(2s-2)}(z=h_c) - R_{zz}^{c(2s-2)}(z=-h_c)),$$

$$\tau^{(2s)} = \sigma_{zz^0}^{3(2s)} - \sigma_{zz^0}^{1(2s)}, \quad \sigma^{(2s)} = \sigma_{zz^0}^{3(2s)} + \sigma_{zz^0}^{1(2s)},$$

$$M_u^{(2s+1)} = \frac{1}{2\Delta_M \rho\Omega^2}\sigma^{(2s)} + C_{M_u}^{(1)},$$

$$N_u^{(2s+1)} = -\frac{1}{2\Delta_N^{(1)}\rho\Omega^2}\tau^{(2s)} + C_{N_u}^{(1)} + \frac{(1-2\nu)\sin\beta h}{2(1-\nu)\beta\alpha_w G\Delta_N^{(1)}}\left[\operatorname{ctg}\alpha_w h_c\left(\frac{\partial}{\partial r}\tau^{(2s)} + \frac{\tau^{(2s)}}{r}\right) +\right.$$

$$\left. + \operatorname{tg}\alpha_w h_c\left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma^{(2s)} + \frac{\sigma^{(2s)}}{r}\right)\right],$$

$$C_{M_u}^{(1)} = \frac{1}{2\Delta_M}[u_r^{+(2s)} + u_r^{-(2s)} - J_u^{1(2s-2)}(z=h_c) - J_u^{3(2s-2)}(z=-h_c) -$$

$$- (P_u^{1(2s-2)} + P_u^{3(2s-2)})\cos\beta h + (T_u^{1(2s-2)} - T_u^{3(2s-2)})\sin\beta h],$$

$$C_{N_u}^{(1)} \frac{1}{2\Delta_N^{(1)}}[u_r^{+(2s)} - u_r^{-(2s)} - J_u^{1(2s-2)}(z=h_c) + J_u^{3(2s-2)}(z=-h_c) - \tag{2.2}$$

$$- (P_u^{1(2s-2)} - P_u^{3(2s-2)})\cos\beta h + (T_u^{1(2s-2)} + T_u^{3(2s-2)})\sin\beta h],$$

$$\Delta_M = \cos\alpha_u h_c \cos\beta h - \frac{\alpha_u G_c}{\beta G}\sin\alpha_u h_c \sin\beta h,\ \Delta_N^{(1)} = \sin\alpha_u h_c \cos\beta h + \frac{\alpha_u G_c}{\beta G}\cos\alpha_u h_c \sin\beta h,$$

$$\Delta_{AM} = \cos\alpha_u h_c \cos\beta h_c + \frac{\alpha_u G_c}{\beta G}\sin\alpha_u h_c \sin\beta h,\ \Delta_{AN}^{(1)} = \sin\alpha_u h_c \cos\beta h_c - \frac{\alpha_u G_c}{\beta G}\cos\alpha_u h_c \sin\beta h_c,$$

$$\Delta_{BM}^{(1)} = \cos\alpha_u h_c \sin\beta h_c - \frac{\alpha_u G_c}{\beta G}\sin\alpha_u h_c \cos\beta h_c,\ \Delta_{BN} = \sin\alpha_u h_c \sin\beta h_c + \frac{\alpha_u G_c}{\beta G}\cos\alpha_u h_c \cos\beta h_c,$$

$$\left(u, \nu; \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\ (1,3; h,-h; h_c,-h_c; \tau^{(2s)}, -\tau^{(2s)}),$$

$$A_u^{1(2s)} = \frac{\Delta_{AM}}{2\Delta_M\rho\Omega^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma^{(2s)} + \frac{\sigma^{(2s)}}{r}\right) - \frac{\Delta_{AN}^{(1)}}{2\Delta_N^{(1)}\rho\Omega^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\tau^{(2s)} + \frac{\tau^{(2s)}}{r}\right) +$$

$$+\frac{(1-2\nu)\Delta_{AN}^{(1)}\sin\beta h}{2(1-\nu)\beta\alpha_w G\Delta_N^{(1)}}\left[\operatorname{ctg}\alpha_w h_c\left(\frac{\partial}{\partial r}\tau^{(2s)}+\frac{\tau^{(2s)}}{r}\right)+\operatorname{tg}\alpha_w h_c\left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma^{(2s)}+\frac{\sigma^{(2s)}}{r}\right)\right]+$$

$$+\Delta_{AM}C_{M_u}^{(1)}+\Delta_{AN}^{(1)}C_{N_u}^{(1)}+P_u^{1(2s-2)}\cos\beta h_c+T_u^{1(2s-2)}\sin\beta h_c-$$

$$-\frac{(1-2\nu)\sin\beta h}{2(1-\nu)\beta\alpha_w G}\left[\operatorname{ctg}\alpha_w h_c\left(\frac{\partial}{\partial r}\tau^{(2s)}+\frac{\tau^{(2s)}}{r}\right)+\operatorname{tg}\alpha_w h_c\left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma^{(2s)}+\frac{\sigma^{(2s)}}{r}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\rho_0\Omega}\cos\beta h_c\left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma_{zz^0}^{1(2s)}+\frac{\sigma_{zz^0}^{1(2s)}}{r}\right),$$

$$B_u^{1(2s)}=\frac{\Delta_{BM}^{(1)}}{2\Delta_M\rho\Omega^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma^{(2s)}+\frac{\sigma^{(2s)}}{r}\right)-\frac{\Delta_{BN}}{2\Delta_N^{(1)}\rho\Omega^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\tau^{(2s)}+\frac{\tau^{(2s)}}{r}\right)+\tag{2.3}$$

$$+\frac{(1-2\nu)\Delta_{BN}\sin\beta h}{2(1-\nu)\beta\alpha_w G\Delta_N^{(1)}}\left[\operatorname{ctg}\alpha_w h_c\left(\frac{\partial}{\partial r}\tau^{(2s)}+\frac{\tau^{(2s)}}{r}\right)+\operatorname{tg}\alpha_w h_c\left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma^{(2s)}+\frac{\sigma^{(2s)}}{r}\right)\right]+$$

$$+\frac{(1-2\nu)\cos\beta h}{2(1-\nu)\beta\alpha_w G}\left[\operatorname{ctg}\alpha_w h_c\left(\frac{\partial}{\partial r}\tau^{(2s)}+\frac{\tau^{(2s)}}{r}\right)+\operatorname{tg}\alpha_w h_c\left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma^{(2s)}+\frac{\sigma^{(2s)}}{r}\right)\right]+$$

$$+\Delta_{BM}^{(1)}C_{M_u}^{(1)}+\Delta_{BN}C_{N_u}^{(1)}+P_u^{1(2s-2)}\sin\beta h_c-T_u^{1(2s-2)}\cos\beta h_c+$$

$$+\frac{1}{\rho_0\Omega}\sin\beta h_c\left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma_{zz^0}^{1(2s)}+\frac{\sigma_{zz^0}^{1(2s)}}{r}\right),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi};u,v\right)\qquad(1,3;h,-h;h_c;\tau^{(2s)},-\tau^{(2s)}),$$

где $\sigma^{(2s)}$, $\tau^{(2s)}$ - решение системы уравнений

$$\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)\alpha_w G_c}\operatorname{tg}\alpha_w h_c\sigma^{(2s)}=\frac{h}{\rho\Omega^2}\nabla^2\tau^{(2s)}+K^{-(s)}\nabla^2\sigma^{2s}+\Psi^{-(s)},$$

$$\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)\alpha_w G_c}\operatorname{ctg}\alpha_w h_c\tau^{(2s)}=-\frac{h}{\rho\Omega^2}\nabla^2\sigma^{(2s)}+K^{+(s)}\nabla^2\tau^{2s}+\Psi^{+(s)},$$

$$K^{+(s)}=\frac{1}{\beta}(\cos\beta(h+h_c)-\cos\beta h_c)\left(\frac{\Delta_{BN}}{\Delta_N\rho\Omega^2}-\frac{\Delta_{BN}(1-2\nu)\sin\beta h}{(1-\nu)\alpha_w\beta G\Delta_N}\operatorname{ctg}\alpha_w h_c-\right.$$

$$\left.-\frac{(1-2\nu)\cos\beta h_c}{(1-\nu)\alpha_w\beta G}\operatorname{ctg}\alpha_w h_c\right)-\frac{1}{\beta}(\sin\beta(h+h_c)-\sin\beta h_c)\left(\frac{\Delta_{AN}}{\Delta_N^{(1)}\rho\Omega^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Delta_{BN}(1-2\nu)\sin\beta h}{2(1-\nu)\alpha_w\beta G\Delta_N^{(1)}}\operatorname{ctg}\alpha_w h_c-\frac{(1-2\nu)\cos\beta h_c}{2(1-\nu)\alpha_w\beta G}\operatorname{ctg}\alpha_w h_c\right)-\frac{\sin\beta h}{\beta\rho_0\Omega^2},$$

$$K^{-(s)}=\frac{1}{\beta}(\cos\beta(h+h_c)-\cos\beta h_c)\left(\frac{\Delta_{BM}}{\Delta_M\rho\Omega^2}-\frac{\Delta_{BN}(1-2\nu)\sin\beta h}{(1-\nu)\alpha_w\beta G\Delta_N}\operatorname{tg}\alpha_w h_c-\right.\tag{2.4}$$

$$\left.-\frac{(1-2\nu)\cos\beta h_c}{(1-\nu)\alpha_w\beta G}\operatorname{tg}\alpha_w h_c\right)-\frac{1}{\beta}(\sin\beta(h+h_c)-\sin\beta h_c)\left(\frac{\Delta_{AM}}{\Delta_M^{(1)}\rho\Omega^2}-\right.$$

$$-\frac{\Delta_{BN}(1-2\nu)\sin\beta h}{2(1-\nu)\alpha_w\beta G\Delta_N^{(1)}}\operatorname{tg}\alpha_w h_c-\frac{(1-2\nu)\cos\beta h_c}{(1-\nu)\alpha_w\beta G}\operatorname{tg}\alpha_w h_c\right)-\frac{\sin\beta h}{\beta\rho_0\Omega^2},$$

$$\Psi^{\pm(s)}=u_z^{-(s)}\pm u_z^{+(s)}-(F_w^{(3)}\pm F_w^{(1)})\cos\alpha_w h_c+(\Phi_w^{(3)}\pm\Phi_w^{(1)})\sin\alpha_w h_c+$$

$$+J_w^{3(2s-2)}(z=-h-h_c)\pm J_w^{1(2s-2)}(z=h+h_c)-J_w^{3(2s-2)}(z=-h_c)\mp J_w^{1(2s-2)}(z=h_c)-$$

$$-J_w^{c(2s-2)}(z=h_c)\mp J_w^{c(2s-2)}(z=-h_c),$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Решение системы (2.4) должно обеспечить выполнение условий

$$\iint\limits_{(S)}\vec{u}\vec{n}^0\,ds=0, \tag{2.5}$$

которые представляют из себя равенство нулю потока вектора перемещения через поверхности (S) несжимаемых слоев.

Приведем это решение для первого шага итерации (с точностью $O(\varepsilon^n)$), когда внешние воздействия не зависят от продольных координат:

$$\sigma^{(0)}=AZ_{01}+BZ_{02}+CI_3^*+DI_4^*+\delta_\sigma,$$

$$\tau^{(0)}=kAZ_{01}+kBZ_{02}+C(kI_3^*+b_1Z_{03})+D(kI_4^*+b_1Z_{04})+a_1\delta_\sigma+f_1,$$

$$A=\frac{1}{\Delta_{12}}(\delta_\tau Z_{02}(\lambda R_0)-\delta_\sigma Z_{02}(\lambda R)),\quad B=\frac{1}{\Delta_{12}}(\delta_\sigma Z_{01}(\lambda R)-\delta_\tau Z_{01}(\lambda R_0)),$$

$$C=\frac{\delta}{\Delta_{34}}(Z_{04}(\mu R)-Z_{04}(\mu R_0)),\quad D=\frac{\delta}{\Delta_{34}}(Z_{03}(\mu R_0)-Z_{03}(\mu R)),$$

$$\Delta_{12}=Z_{01}(\lambda R_0)Z_{02}(\lambda R)-Z_{01}(\lambda R)Z_{02}(\lambda R_0), \tag{2.6}$$

$$\Delta_{34}=Z_{03}(\mu R_0)Z_{04}(\mu R)-Z_{03}(\mu R)Z_{04}(\mu R_0),$$

$$\delta=\frac{\delta_\tau(k-a_1)-f_1}{b_1},\quad \delta_\tau=CI_3^*(R)+DI_4^*(R)+\delta_\sigma,\quad \delta_\sigma=\frac{f_2+a_2f_1}{a_1a_2-1},\quad k=a_1-b_1\lambda^2,$$

$$\mu_{1,2}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}\right)^2-4\frac{a_1a_2-1}{b_1b_2}},$$

$$\mu_1^2=\mu^2,\quad \mu_2^2=\lambda^2,$$

$$a_1=\frac{K^{+(0)}\rho\Omega^2}{h}\operatorname{tg}^2\alpha_w h_c,\quad a_2=\frac{K^{-(0)}\rho\Omega^2}{h}\operatorname{ctg}^2\alpha_w h_c,$$

$$b_1=-\frac{2(1-\nu)\alpha_w G_c}{1-2\nu}\left(\frac{h}{\rho\Omega^2}-\frac{\rho\omega^2}{h}K^{+(0)}K^{-(0)}\right)\operatorname{tg}\alpha_w h_c,$$

$$b_2=\frac{2(1-\nu)\alpha_w G_c}{1-2\nu}\left(\frac{h}{\rho\Omega^2}+\frac{\rho\omega^2}{h}K^{+(0)}K^{-(0)}\right)\operatorname{ctg}\alpha_w h_c,$$

$$f_1=-\frac{2(1-\nu)\alpha_w G_c}{1-2\nu}\operatorname{tg}\alpha_w h_c\left(\Psi^{+(0)}-K^{+(0)}\Psi^{-(0)}\frac{\rho\Omega^2}{h}\right),$$

$$f_2 = -\frac{2(1-\nu)\alpha_w G_c}{1-2\nu} \operatorname{ctg} \alpha_w h_c \left(\Psi^{-(0)} + K^{-(0)} \Psi^{+(0)} \frac{\rho \Omega^2}{h} \right),$$

$$I_3^*(r) = Z_{01}(\lambda r) \int\limits_{R_0}^{r} \frac{Z_{02}(\lambda\xi) Z_{03}(\mu\xi)}{\Delta} d\xi - Z_{02}(\lambda r) \int\limits_{R_0}^{r} \frac{Z_{01}(\lambda\xi) Z_{03}(\mu\xi)}{\Delta} d\xi,$$

$$\Delta = Z'_{01}(\lambda r) Z_{02}(\lambda\xi) - Z_{01}(\lambda r) Z'_{02}(\lambda\xi),$$

где функции Z_{0j}, $j = 1,2,3,4$ - цилиндрические функции [5,6], которые являются решениями уравнений

$$\frac{d^2\sigma}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\sigma}{dr} + \lambda^2 \sigma = 0, \quad \frac{d^2 q}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dq}{dr} + \mu^2 q = 0. \tag{2.7}$$

При наличии численных значений λ и μ эти функции могут быть конкретизированы [5,6].

Таким образом, выведены рекуррентные формулы для определения компонент полей напряжений и перемещений трехслойной кольцеобразной пластины со сжимаемым средним слоем. Они могут моделировать, в частности, работу резинометаллических сейсмоизоляторов.

Заметим, что при

$$\sin \alpha_w h_c = 0, \quad \cos \alpha_w h_c = 0, \quad \Delta_M = 0, \quad \Delta_N = 0 \tag{2.8}$$

амплитуды вынужденных колебаний резко возрастают, следовательно (2.8) являются уравнениями главных значений частот собственных колебаний, которые приводят к резонансу.

Работа выполнена при поддержке Гранта INTAS - 03-51-5547.

Институт механики НАН РА
Армянский государственный аграрный университет

Р.С. Геворкян, Е.Г. Вирабян, С.Н. Базикян

Вынужденные колебания трехслойной круговой кольцевой пластины со сжимаемым средним и несжимаемыми крайними слоями

Асимптотическим решением уравнений динамической задачи теории упругости для пластин состоящих из сжимаемых и несжимаемых материалов выведенны формулы для определения компонент тензора напряжений и вектора перемещения трехслойной пластины со сжимаемым средним и несжимаеми крайными слоями, когда лицевым поверхностям пластины сообщены вынужденные гармонические колебания. Выведены дисперсионные уравнения вызывающих резонанс главных значений частот собственных колебаний.

Задача, в частности, моделирует работу резинометаллических сейсмоизоляторов.

Ռ.Ս. Գևորգյան, Ե.Գ. Վիրաբյան, Ս.Ն. Բազիկյան

Սեղմելի միջին և անսեղմելի եզրային շերտերով եռաշերտ շրջանային օղակաձև սալի հարկադրական փափանումները

Սեղմելի և անսեղմելի նյութերի շերտերից բաղկացած սալերի համար առաձգականության տեսության դինամիկ խնդրի հավասարումների ասիմպտոտիկական լուծմամբ արտածված են բանաձևեր՝ սեղմելի միջին և անսեղմելի եզրային շերտերով եռաշերտ սալի լարումների թենզորի և տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչները որոշելու համար, երբ սալի դիմային մակերևույթներին հաղորդված են ներդաշնակ հարկադրական փափանումներ: Արտածված են ռեզոնանս առաջացնող սեփական փափանումների հաճախականությունների գլխավոր արժեքների դիսպերսիոն հավասարումները:

Խնդիրը, մասնավորապես, մոդելավորում է ռետինամետաղական սեյսմամեկուսիչների աշխատանքը:

R.S. Gevorgyan, Ye.G. Virabyan, S.N. Bazikyan

Forced Vibrations of a Circular Ring Three-Layered Plate with Compressible Middle and Uncompressible Boundary Layers

By means of the asymptotic solution of dynamic equations of an elasticity theory for plates from compressible and uncompressible materials formula for the components of the voltage tensor and displacement vector for a circular ring three-layered plate with compressible middle and uncompressible boundary layers are derived, when at the front-face areas the harmonic forced vibrations are imparted. The dispersion equations of the main frequency values of self-oscillations of the plate are obtained. The problem, in particular, is simulate the work of the rubber- metallic seismoisolators.

Литература

1. *Вирабян Е.Г., Геворкян Р.С.* - Изв. НАН РА. Механика. 2003. N1. С. 15-25.

2. *Вирабян Е.Г.* - Изв. НАН РА Механика. 2002. N4. С. 24-29.

3. *Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V., Ghulghazaryan L.G.* - Proceedings of the Third World Conference on Structural Control. Como, Italy. V. 2. P. 759-764.

4. *Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V.* - Proceedings of the Third European Conference on Structural Control. Vienna, Austria. 2004. V.1. P. M6-21-M6-24.

5. *Коченев Б.Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в Бесселевых функциях. М. Физматгиз. 1960. 459 с.

6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. Физ. мат. гиз. 1971. 1108 с.