ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 107 2007 № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Академик Л. А. Агаловян, Т. В. Закарян

Об асимптотике вынужденных колебаний ортотропной полосы

(Представлено 9/II 2007)

Ключевые слова: вынужденные колебания, упругость, асимптотика, амплитуда, резонанс

Асимптотическим методом решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений определено решение внутренней первой краевой динамической задачи для ортотропной полосы - прямоугольника. Установлены асимптотические порядки всех компонент тензора напряжений и вектора перемещения, которые принципиально отличаются от соответствующих асимптотик в статической задаче. Выведены условия возникновения резонанса.

1. Статические краевые задачи тонких тел (балки, стержни, пластины, оболочки) асимптотическим методом рассмотрены в [1-3]. Метод оказался особенно эффективным для решения неклассических задач, т.е. когда на лицевых поверхностях тонкого тела заданы значения вектора перемещения или смешанные краевые условия теории упругости [2-5]. Тем же методом решены некоторые классы неклассических задач о собственных и вынужденных колебаниях. Обзор соответствующих исследований дан в [6]. В данной работе рассмотрена плоская задача теории упругости о вынужденных колебаниях полосы — прямоугольника, когда на продольных краях заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений.

Требуется найти решение уравнений плоской деформации теории упругости [7] в области $D = \{(x, y) : 0 \le x \le l, |y| \le h, h << l\}$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta_{11}\sigma_{xx} + \beta_{12}\sigma_{yy}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \beta_{12}\sigma_{xx} + \beta_{22}\sigma_{yy}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66}\sigma_{xy},$$

где

$$\beta_{11} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{33}}, \quad \beta_{22} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{a_{33}}, \tag{1.2}$$

$$\beta_{12} = \left(\frac{a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}}{a_{33}}\right), \quad a_{66} = \frac{1}{G_{12}},$$

a_{ik} — постоянные упругости, G_{12} — модуль сдвига,
при граничных условиях

$$\sigma_{yy}(y=h) = Y^+(\xi)\exp(i\omega t), \quad \sigma_{xy}(y=h) = X^+(\xi)\exp(i\omega t), \xi = x/l, \tag{1.3}$$

$$\sigma_{yy}(y=-h) = -Y^-(\xi)\exp(i\omega t), \quad \sigma_{xy}(y=-h) = X^-(\xi)\exp(i\omega t).$$

В (1.3) $X^{\pm}$, $Y^{\pm}$ - заданные функции, ω - частота вынуждающего воздействия. Граничные условия при $x = 0, l$ пока не будем конкретизировать. Как убедимся ниже, ими обусловлено появление пограничных слоев. Решение сформулированной краевой задачи (1.1), (1.3) будем искать в виде

$$\sigma_{xx}(x,y,t) = \sigma_{11}(x,y)\exp(i\omega t) \quad \sigma_{xy}(x,y,t) = \sigma_{12}(x,y)\exp(i\omega t),$$

$$\sigma_{yy}(x,y,t) = \sigma_{22}(x,y)\exp(i\omega t), \quad u(x,y,t) = u_x(x,y)\exp(i\omega t), \tag{1.4}$$

$$v(x,y,t) = u_y(x,y)\exp(i\omega t).$$

Затем перейдем к безразмерным координатам и перемещениям

$$x = l\xi, \quad y = h\zeta, \quad U = u_x/l, \quad V = u_y/l. \tag{1.5}$$

Подставив (1.4) в (1.1), с учетом (1.5) получим

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\omega_*^2 U = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\omega_*^2 V = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial\xi} = \beta_{11}\sigma_{11} + \beta_{12}\sigma_{22}, \quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta} = \beta_{12}\sigma_{11} + \beta_{22}\sigma_{22}, \tag{1.6}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta} + \frac{\partial V}{\partial\xi} = a_{66}\sigma_{12}, \quad \omega_*^2 = \rho h^2\omega^2, \quad \varepsilon = h/l.$$

Решение сингулярно возмущенной системы (1.6) состоит из решений внутренней задачи и пограничных слоев. Решение внутренней задачи будем искать в виде

$$\sigma_{11} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{11}^{(s)}(\xi,\zeta), \quad \sigma_{12} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{12}^{(s)}(\xi,\zeta), \tag{1.7}$$

$$\sigma_{22} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{22}^{(s)}(\xi,\zeta), \quad (U,V) = \varepsilon^s(U^{(s)}, V^{(s)}).$$

Подставив (1.7) в (1.6) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, для определения $\sigma_{ik}^{(s)}, U^{(s)}, V^{(s)}$ получим систему

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(s)}}{\partial\zeta}+\omega_*^2U^{(s)}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(s)}}{\partial\zeta}+\omega_*^2V^{(s)}=0,$$

$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}=\beta_{11}\sigma_{11}^{(s)}+\beta_{12}\sigma_{22}^{(s)},\quad \frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}=\beta_{12}\sigma_{11}^{(s)}+\beta_{22}\sigma_{22}^{(s)}, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{66}\sigma_{12}^{(s)}.$$

Из системы (1.8) следуют соотношения

$$\sigma_{11}^{(s)}=\frac{1}{\Delta_1}\left(-\beta_{12}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}+\beta_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}\right),\quad \sigma_{22}^{(s)}=\frac{1}{\Delta_1}\left(\beta_{11}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}-\beta_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}\right), \tag{1.9}$$

$$\sigma_{12}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right),\quad \Delta_1=\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}^2,$$

а также уравнения для $U^{(s)}$, $V^{(s)}$

$$\frac{\partial^2U^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{66}\omega_*^2U^{(s)}=f_u^{(s)},\quad \frac{\partial^2V^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}\omega_*^2V^{(s)}=f_v^{(s)}, \tag{1.10}$$

$$f_u^{(s)}=-a_{66}\left(\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial^2V^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}\right),\quad f_v^{(s)}=\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\frac{\partial^2U^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}-\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}.$$

Решениями уравнений (1.10) являются

$$U^{(s)}=C_1^{(S)}(\xi)\sin\sqrt{a_{66}}\omega_*\zeta+C_2^{(S)}(\xi)\cos\sqrt{a_{66}}\omega_*\zeta+\overline{u}^{(s)}, \tag{1.11}$$

$$V^{(s)}=C_3^{(S)}(\xi)\sin\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*\zeta+C_4^{(S)}(\xi)\cos\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*\zeta+\overline{v}^{(s)},$$

где $\overline{u}^{(s)}$, $\overline{v}^{(s)}$ частные решения уравнений (1.10).

Вычислив по формулам (1.9) $\sigma_{ik}^{(s)}$ и удовлетворив условиям (1.3), определим постоянные $C_i^{(S)}$ и окончательное решение внутренней задачи:

$$U^{(s)}=-\frac{\sqrt{a_{66}}}{\omega_*\sin2\sqrt{a_{66}}\omega_*}[(X^{+(s)}-f_{\sigma_{12}}^{(s)}(\xi,1))\cos\sqrt{a_{66}}\omega_*(1+\zeta)+$$

$$(X^{-(s)}+f_{\sigma_{12}}^{(s)}(\xi,-1))\cos\sqrt{a_{66}}\omega_*(1-\zeta)+]+\overline{u}^{(s)}(\xi,\zeta),$$

$$V^{(s)}=-\frac{1}{\omega_*\sin2\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*}\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}[(Y^{+(s)}-f_{\sigma_{22}}^{(s)}(\xi,1))\cos\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*(1+\zeta)+ \tag{1.12}$$

$$+(Y^{-(s)}+f_{\sigma_{22}}^{(s)}(\xi,-1))\cos\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*(1-\zeta)]+\overline{v}^{(s)}(\xi,\zeta),$$

$$f_{\sigma_{12}}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left(\frac{\partial\overline{u}^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right),\quad f_{\sigma_{22}}^{(s)}=\frac{1}{\Delta_1}\left(\beta_{11}\frac{\partial\overline{v}^{(s)}}{\partial\zeta}-\beta_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}\right).$$

$$X^{\pm(0)} = \pm\varepsilon X^{\pm}, \quad Y^{\pm(0)} = \pm\varepsilon Y^{\pm}, \quad X^{\pm(s)} = 0, \quad Y^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0.$$

Напряжения $\sigma_{11}^{(s)}$, $\sigma_{22}^{(s)}$, $\sigma_{12}^{(s)}$ определяются по формулам (1.9). Таким образом, в отличие от статической первой краевой задачи [2] в динамической внутренней задаче решение полностью определяется из условий при $y = \pm h$. Как известно [2], в статической первой краевой задаче напряжения и перемещения имеют разные асимптотические порядки:

$$\sigma_{xx} = 0(\varepsilon^{-2}), \quad \sigma_{xy} = 0(\varepsilon^{-1}), \quad \sigma_{yy} = 0(\varepsilon^{0}), \quad u = 0(\varepsilon^{-2}), \quad v = 0(\varepsilon^{-3}). \qquad (1.13)$$

Следовательно, динамический процесс коренным образом меняет характер напряженно-деформированного состояния.

Для определения полного решения внутренней статической задачи (кроме условий второй краевой задачи) используются граничные условия на торцах $x = 0.l$, которые влияют на окончательное решение. Таким образом, из-за динамики компоненты напряжений оказываются одинакового порядка, а условия при $x = 0.l$ влияют лишь на пограничный слой.

Отметим, что когда функции $X^{\pm}$, $Y^{\pm}$ являются многочленами, итерационный процесс обрывается на определенном приближении и получаем точное решение внутренней задачи. В частности, при $X^{\pm}=\text{const}$, $Y^{\pm}=\text{const}$ имеем решение

$$u = -\frac{h\sqrt{a_{66}}}{\omega_* \sin 2\sqrt{a_{66}}\omega_*}[X^+ \cos\sqrt{a_{66}}\omega_*(1+\zeta) + X^- \cos\sqrt{a_{66}}\omega_*(1-\zeta)],$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\sin 2\sqrt{a_{66}}\omega_*}[X^+ \sin\sqrt{a_{66}}\omega_*(1+\zeta) - X^- \sin\sqrt{a_{66}}\omega_*(1-\zeta)]\exp(i\omega t),$$

$$v = -\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\frac{h}{\omega_* \sin 2\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*}[Y^+ \cos\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*(1+\zeta) + Y^- \cos\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*(1-\zeta)]\exp(i\omega t),$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{\sin 2\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*}[Y^+ \sin\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*(1+\zeta) - Y^- \sin\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*(1-\zeta)]\exp(i\omega t), \qquad (1.14)$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\frac{1}{\sin 2\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*}[Y^+ \sin\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*(1+\zeta) - Y^- \sin\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*(1-\zeta)]\exp(i\omega t),$$

Решения (1.12), (1.14) справедливы, если

$$\sin 2\sqrt{a_{66}}\omega_* \neq 0 \quad \sin 2\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_* \neq 0. \qquad (1.15)$$

Условия (1.15) ставят ограничения на значения частот и на упругие и геометрические характеристики полосы, а именно

$$\omega \neq \frac{\pi n}{2h}\frac{1}{\sqrt{\rho a_{66}}} = \frac{\pi n}{2h}\sqrt{\frac{G_{12}}{\rho}} = \frac{\pi n}{2h}v_s, \quad \omega \neq \frac{\pi n}{2h}\sqrt{\frac{\beta_{11}}{\rho\Delta_1}} = \frac{\pi n}{2h}v_p, \qquad (1.16)$$

где $v_s = \sqrt{\frac{G_{12}}{\rho}}$, $v_p = \sqrt{\frac{\beta_{11}}{\rho\Delta_1}}$ - известные в теории упругости и сейсмологии скорости распространения сдвиговых и продольных волн. В частности, из формул (1.2), (1.9), (1.16) для изотропной среды вытекают известные скорости распространения сдвиговых и продольных волн:

$$v_s = \sqrt{\frac{G_{12}}{\rho}} \quad v_p = \sqrt{\frac{E(1+\nu)}{\rho(1-\nu)(1+2\nu)}}, \tag{1.17}$$

где G_{12} - модуль сдвига, E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона.

Значения ω, при которых условия (1.15) не выполняются, т.е.

$$\sin 2\sqrt{a_{66}}\omega_* = 0 \quad \sin 2\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_* = 0, \tag{1.18}$$

совпадают с главными значениями частот собственных колебаний [6].

Решения (1.12),(1.14), как правило, не удовлетворяют граничным условиям при $x = 0.l$. Для удовлетворения этих условий необходимо иметь новое решение. Таким решением является решение типа пограничного слоя, т.е. такое решение, которое быстро убывает при удалении от торцов $x = 0.l$ во внутрь полосы и содержит достаточное количество произвольных постоянных для удовлетворения торцевых условий. Пограничный слой строится и сопрягается с решением внутренней задачи описанным в [2,6] способом, который является предметом отдельного рассмотрения.

Институт механики НАН РА

Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան, Տ. Վ. Զաքարյան

Օրթոտրոպ շերտի ստիպողական տատանումների ասիմպտոտիկայի մասին

Սինգուլյար գրգռված դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման ասիմպտոտիկ մեթոդով որոշված է հարթ դեֆորմացիոն վիճակում գտնվող օրթոտրոպ շերտի համար առաձգականության տեսության դինամիկ առաջին եզրային խնդրի լուծումը շերտի ներքին տիրույթում: Հաստատված են լարումների թենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկաները, որոնք սկզբունքորեն տարբերվում են ստատիկական խնդրի համապատասխան ասիմպտոտիկաներից: Ցույց է տրված, որ ստիպողական տատանումների խնդրում, ի տարբերություն առաջին ստատիկական եզրային խնդրի, լարումների թենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչները լիովին որոշվում են շերտի երկայնական կողերի վրա տրված պայմաններից, հետևաբար ուղղաձիգ կողերի վրա տրված պայմանները ազդում են միայն սահմանային շերտի մեծությունների վրա: Նշված են այն դեպքերը, երբ կարելի է ստանալ ներքին խնդրի ճշգրիտ լուծումը: Արտածված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները, հաստատված են կապեր սեյսմիկ սահքային և երկայնական ալիքների տարածման արագությունների հետ:

Academician L. A. Aghalovyan, T. V. Zakaryan

On the Asymptotic of Forced Vibrations of Orthotropic Strip

The solution of the first dynamic boundary problem of forced vibrations of orthotropic strip, considering under conditions of plane deformation, are obtained by the asymptotic method developed in [2]. The asymptotic orders of strain tensor components and vector of displacements, essentially differing from corresponding asymptotic in static problem, are determined. It is shown that the solution of internal dynamic problem is completely determined trough the conditions on longitudinal borders of strip. The cases, where the exact mathematical solution of internal problem can be obtained, are indicated. The conditions of resonance origin are determined.

Литература

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М. Наука. 1976. 510с.

2. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.

3. *Агаловян Л. А. , Геворкян Р. С.* Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван. Изд. "Гитутюн" НАН РА. 2005. 468 с.

4. *Агаловян Л. А. , Геворкян Р. С.* — Тр. IV симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск. Наука. 1984. С. 105-110.

5. *Агаловян Л. А. , Геворкян Р. С.* — Прикл. мат. и мех. (ПММ.) 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 271-278.

6. *Агаловян Л. А.* — Прикл. механика. 2002. Т. 38. N 7. С. 3-24.

7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М. Наука. 1977. 416с.