ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 107 2007 № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

М. В. Белубекян, К. Б. Казарян, С. Р. Мартиросян

Модельные задачи учета трения для консольной балки со следящей нагрузкой

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 7/XII 2006)

Ключевые слова: *балка, устойчивость, сосредоточенная масса, вязкость, флаттер*

Известно, что в неконсервативных задачах устойчивости учет трения может привести к дестабилизации. Этот эффект был показан Циглером на простой модельной задаче об устойчивости двухзвенного маятника [1]. В [2] задача Циглера была обобщена на случай наличия как внутреннего, так и внешнего трения. В [3] приводится обзор литературы по учету трения в задачах устойчивости неконсервативных систем, а также предлагается общий подход к их исследованию. Тем не менее, настоящая статья предполагает, что дальнейшие исследования на примерах модельных задач представляют интерес.

1. Рассматривается консольная балка, сжатая на свободном конце следящей нагрузкой P. Уравнение устойчивости балки принимается в виде

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \tag{1.1}$$

т.е. предполагается, что в реальном уравнении устойчивости пренебрегаются инерционный член и силы от внутреннего и внешнего трения.

Перефразируя Хоффа [4], можно записать, что "...уравнение (1.1) (Доннелла) обладает большим преимуществом, которое заключается в том, что характеристическое уравнение, получаемое при подстановке экспоненциального решения, имеет корни, которые можно выразить в простом (замкнутом) виде".

Впервые динамическая устойчивость на основе уравнения (1.1) при наличии сосредоточенной инерционной массы на свободном конце была исследована В. В. Болотиным [5]; она известна как "задача Болотина".

В рассматриваемых в настоящей статье задачах условия закрепления принимаются в виде

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{1.2}$$

Кроме того, в настоящем разделе принимается условие равенства нулю перерезывающей силы на конце $x = l$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при} \quad x = l, \tag{1.3}$$

откуда очевидно, что приложенная нагрузка "следящая". Предполагается также, что на конце $x = l$ приложен сосредоточенный момент инерции поворота [6] в сочетании с различными видами трения (или вязкого сопротивления).

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), имеет вид

$$w = C[tg\alpha l(\sin\alpha x - \alpha x) + \cos\alpha x - 1]\exp(i\omega t), \tag{1.4}$$

где

$$\alpha = \sqrt{P/(EI)}, \tag{1.5}$$

C - произвольная постоянная.

Пусть на конце $x = l$, кроме условия (1.3), задано также условие относительно изгибающего момента

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I_1\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \gamma_1\frac{\partial w}{\partial t}, \quad \gamma_1 \succ 0. \tag{1.6}$$

Условие вида (1.6) с трением $\gamma_1 \partial w/\partial t$, но без момента инерции поворота рассматривалось также в [6,7].

Подстановка решения (1.5) в (1.6) приводит к уравнению относительно частоты колебаний

$$\omega = -i\varepsilon_1\frac{1-\cos\alpha l - \alpha l\sin\alpha l}{2\alpha\beta\sin\alpha l} \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta\sin\alpha l} - \varepsilon_1^2\frac{(1-\cos\alpha l - \alpha l\sin\alpha l)^2}{4\alpha^2\beta^2\sin^2\alpha l}}. \tag{1.7}$$

Здесь приняты обозначения

$$\beta = \frac{I_1}{EI}, \quad \varepsilon_i = \frac{\gamma_i}{EI}, \quad i = 1,2,3,5. \tag{1.8}$$

В случае отсутствия нагрузки ($\alpha = 0$) из (1.7) получаем частоты колебаний балки при наличии затухания ($\varepsilon_1 \succ 0$)

$$\lim_{\alpha\to 0}\omega = i\frac{\varepsilon_1 l}{4\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{l\beta} - \frac{\varepsilon_1^2 l^2}{16\beta^2}}, \quad \mathrm{Im}\omega \succ 0. \tag{1.9}$$

А в случае наличия следящей нагрузки из (1.4) следует, что условием устойчивости будет

$$\mathrm{Im}\omega \succ 0. \tag{1.10}$$

При отсутствии трения ($\varepsilon_1 = 0$) из (1.7) следует, что условие (1.10) нарушается при перемене знака функции $\sin \alpha l$ в зависимости от α. Этот случай был исследован А. Р. Ржаницыным в работе [6]. Очевидно, что минимальная критическая нагрузка, приводящая к флаттерной неустойчивости, будет

$$\alpha = \pi / l \quad \text{или} \quad P_{kr} = \pi^2 EI / l^2. \tag{1.11}$$

При наличии трения $\varepsilon_1 \succ 0$ условие (1.10) может быть нарушено в зависимости как от значения α, так и от перемены знака функции

$$f(\alpha l) = 1 - \cos \alpha l - \alpha l \sin \alpha l. \tag{1.12}$$

Функция $f(\alpha l)$ первый раз меняет знак в промежутке $[\pi/2, \pi]$ в точке $\alpha l \simeq 2.3311$. Поэтому минимальное критическое значение нагрузки, приводящее к флаттерной неустойчивости, будет меньше критического значения (1.11).

Таким образом, в рассматриваемом примере наличие трения вида $\gamma_1 \partial w / \partial t$ приводит к дестабилизации (к уменьшению критической нагрузки). При этом имеем следующее приближенное значение критической нагрузки:

$$\alpha \approx \frac{3\pi}{4l} \quad \text{или} \quad P_{kr} \approx \frac{9\pi^2 EI}{16 l^2}. \tag{1.13}$$

2. Пусть на конце балки $x = l$ вместо условия (1.6) имеем условие с другой моделью трения, а именно:

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \gamma_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \quad (\gamma_2 \succ 0). \tag{2.1}$$

Подставляя (1.4) в (2.1), получаем следующее выражение для частоты колебаний:

$$\omega = i \frac{\varepsilon_2}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta \sin \alpha l} - \frac{\varepsilon_2^2}{4\beta^2}}. \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует формула

$$\lim_{\alpha \to 0} \omega = i \frac{\varepsilon_2}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{\beta l} - \frac{\varepsilon_2^2}{4\beta^2}}, \quad \mathrm{Im}\omega \succ 0, \tag{2.3}$$

которая получена в [6]. Следовательно, в (2.2) условие (1.10) может быть нарушено, если меняет знак функция $\sin \alpha l$. Т.е. для рассматриваемой модели трение не влияет на условие устойчивости.

Нетрудно проверить, что при следующих граничных условиях, заменяющих граничное условие (1.6) или (2.1), но с другими моделями трения:

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I_1\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \gamma_3\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \quad (\gamma_3 \succ 0). \tag{2.4}$$

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I_1\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \gamma_5\frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \quad (\gamma_5 \succ 0), \tag{2.5}$$

учет трения не влияет на критическую нагрузку флаттерной неустойчивости.

3. Для консольной балки наряду с граничными условиями закрепления конца $x = 0$ (1.2) принимается условие равенства нулю изгибающего момента на свободном конце

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = l. \tag{3.1}$$

Решение уравнения устойчивости (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (3.1), имеет вид

$$w = C[\sin\alpha x - \alpha x - tg\alpha l(\cos\alpha x - 1)] \cdot \exp e\omega t. \tag{3.2}$$

Далее рассматривается влияние различных моделей трения в граничном условии перерезывающей силы при наличии сосредоточенной массы на конце балки $x = l$. Пусть на конце $x = l$ второе граничное условие имеет вид

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta_1\frac{\partial w}{\partial t} \quad (\delta_1 \succ 0). \tag{3.3}$$

В случае отсутствия трения ($\delta_1 = 0$) получается задача В. В. Болотина [5]. Подстановка решения (3.2) в граничное условие (3.3) дает уравнение для частоты колебания, откуда получается

$$\omega = i\frac{e_1}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{\alpha^3}{\gamma(\sin\lambda l - \lambda l\cos\lambda l)} - \frac{e_1^2}{4\gamma^2}}, \tag{3.4}$$

где

$$\gamma = \frac{m}{EI}, \quad e_i = \frac{\delta_i}{EI} \quad (i = 1, 2, 4). \tag{3.5}$$

В случае отсутствия нагрузки получаются колебания с затуханием

$$\lim_{\alpha\to 0}\omega = i\frac{e_1}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{3}{\gamma l^3} - \frac{e_1^2}{\gamma^2}}, \quad \mathrm{Im}\omega \succ 0. \tag{3.6}$$

С учетом (3.6) из (3.4) следует, что условие устойчивости (1.10) будет нарушено при перемене знака функции

$$g(\alpha l) = \sin\alpha l - \alpha l\cos\alpha l, \tag{3.7}$$

что совпадает с условием устойчивости задачи В. В. Болотина. Т.е. в этом случае учет трения не влияет на критическую нагрузку флаттерной неустойчивости. Для определения минимальной критической нагрузки получается значение $\alpha l \approx 3\pi/2$, или, более точно, $\alpha l = 4.493$.

Заменим теперь граничное условие (3.3) на условие

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta_2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \quad (\delta_2 \succ 0), \tag{3.8}$$

Требование, чтобы решение (3.2) удовлетворяло условию (3.8), определяет частоту колебаний

$$\omega = i\frac{\alpha e_2(1-\cos\alpha l)}{2\gamma(\sin\alpha l - \alpha l\cos\alpha l)} \pm \sqrt{\frac{\alpha^3}{\gamma(\sin\alpha l - \alpha l\cos\alpha l)} - \frac{\alpha e_2^2(1-\cos\alpha l)^2}{4\gamma^2(\sin\alpha l - \alpha l\cos\alpha l)^2}}. \tag{3.9}$$

Из (3.9) следует

$$\lim_{\alpha\to 0}\omega = i\frac{3l_2}{4l\gamma} \pm \sqrt{\frac{3}{\gamma l^3} - \frac{9l_2^2}{4l^2\gamma^2}}, \quad \mathrm{Im}\omega \succ 0. \tag{3.10}$$

Таким образом, и в этом случае условие устойчивости нарушится при перемене знака функции (3.7). Т.е. учет трения не влияет на минимальную критическую нагрузку флаттера.

Аналогичный результат получается также, если вместо граничных условий (3.3) или (3.8) рассмотреть граничное условие следующего вида:

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \delta_4\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial t}. \tag{3.11}$$

4. Интересные эффекты получаются, когда одновременно учитываются трения, характеризующиеся различными моделями [2]. Пусть для консольной балки имеет место решение (1.4), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3). На конце балки $x = l$ задано четвертое граничное условие в виде

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -I_1\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \gamma_1\frac{\partial w}{\partial t} - \gamma_3\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}. \tag{4.1}$$

Подстановка (4.1) в решение (1.4) приводит к следующей формуле для частоты колебаний:

$$\omega = i\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta\sin\alpha l} - \frac{a^2}{4}}, \tag{4.2}$$

где

$$a = \frac{\varepsilon_1(\cos\alpha l + \alpha l\sin\alpha l - 1) + \alpha^2\varepsilon_3}{2\alpha\beta\sin\alpha l}. \tag{4.3}$$

Сравнение с результатом примера (1.7) показывает, что в этом случае, в зависимости от параметров ε_1, ε_3, трение может привести к уменьшению нагрузки, может и не влиять.

Заключение. Приведенные примеры показывают, что учет трения может иметь дестабилизирующий характер при наличии следящей нагрузки. Однако в большинстве случаев трение не оказывает влияния на минимальную критическую нагрузку флаттерной неустойчивости.

Институт механики НАН РА

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Կ. Բ. Ղազարյան, Ս. Ռ. Մարտիրոսյան

Հետևող բեռով բարձած հեծանի մոդելային խնդիրները շփման հաշվառման դեպքում

Դիտարկված է հեծան, որի մի ծայրը ամրակցված է, իսկ ազատ ծայրի վրա ազդում է սեղմող ուժ, որն իր ուղղությունը փոխում է ծռման ընթացքում: Ենթադրվում է, որ ազատ ծայրում կիրառված է նաև կենտրոնացած զանգված՝ շփման տարբեր տեսակի օրենքների դեպքում: Շփումների այս տեսակները հանգեցնում են կրիտիկական ուժի փոքրացման:

M. V. Belubekyan, K. B. Ghazaryan, S. R. Martirosyan

Damping Effects in Model Problems for Cantilevered Beam with Follower Type Load

Effects of friction based on several model problems are studied on stability of cantilevered beam under action of follower type load. The destabilization effects due to friction are established.

Литература

1. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М. Мир. 1971. 192 с.

2. *Пановко Я. Г., Сорокин С. В.*–Изв. АН СССР. МТТ. 1987. N 5. С. 135-139.

3. *Кириллов О. П., Сейранян А. П.* – ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 4. С. 584-611.

4. *Хофф Н.* – Прикладная механика. Труды амер. о-ва инж.-механиков. 1965. Т. 32. N 3. С. 60-69.

5. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М. Гос. изд. физ.-мат. лит. 1961. 360 с.

6. *Ржаницын А. Р.* – Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т. 38. N 5. С. 33-44.

7. *Мовсесян Л. А., Нерсисян Г. Г.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т. 59. N 1. С. 31-36.