ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 107 2007 № 2

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА А. Г. Багдоев, Л. А. Мовсисян

О проблеме распространения нелинейных волн модуляции в пластине в продольном магнитном поле

(Представлено 3/XI 2006)

Ключевые слова: *нелинейная волна, модуляция, магнитная индукция, частота, устойчивость*

Нелинейные волны модуляции в пластинах и цилиндрических оболочках в различных постановках рассмотрены в [1-3] и др. В [4] изучено воздействие продольного магнитного поля на устойчивость волн модуляции в нелинейно-упругой (кубической) пластине. При этом магнитное поле учтено и в нелинейных членах. Причем как в пластине, так и в вакууме рассмотрение проводится в лагранжевых координатах, а для магнитного поля берутся физические составляющие (эйлеровы). В работах [5, 6] получены нелинейные уравнения движения магнитоупругих пластин, которые должны быть решены совместно с уравнениями электродинамики вне нее в лагранжевых координатах.

В настоящей статье на основании [4] исследуется случай квадратичной и геометрической нелинейностей. Здесь взаимовлияние продольных и поперечных волн позволяет расширить область изучения нелинейных изгибных волн модуляции.

1. Идеально проводящая пластина находится в однородном продольном магнитном поле. Изучаются распространение одномерных нелинейных волн и их модуляционная устойчивость. Предполагается, что направление распространения совпадает с направлением магнитного поля $(H_0, 0, 0)$. Для пластинки принимается гипотеза прямых перпендикуляров, что допустимо для магнитоупругих идеально проводящих пластин в продольном магнитном поле [7].

На основании гипотезы для перемещений, компонентов деформации и скоростей имеем

$$u_x = u(x,t) - z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_z = w(x,t),$$
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{1.1}$$
$$v_x = \frac{\partial u}{\partial t} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \quad v_z = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Нелинейные уравнения движения пластинки возьмем в виде [7,8]

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \sigma_{xz}^{+} - \sigma_{xz}^{-} = \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \int\limits_{-h/2}^{h/2} K_x dz.$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \sigma_z^{+} - \sigma_z^{-} = \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \int\limits_{-h/2}^{h/2}\left(K_z - z\frac{\partial K_x}{\partial x}\right)dz. \tag{1.2}$$

Обозначения общепринятые. Последние члены в уравнениях (1.2) есть сила Лоренца, которая определяется формулой

$$\overline{K} = \frac{1}{4\pi}(\mathrm{rot}\ \overline{h} \times \overline{H}_0), \tag{1.3}$$

а магнитное поле

$$\overline{H} = \overline{h} + \overline{H}_0. \tag{1.4}$$

В окончательной формуле для нелинейного дисперсионного соотношения слагаемые, пропорциональные произведению малой толщины пластинки h на магнитное поле, отбрасываются (см.формулу (1.15)), поскольку K пропорционально h и его вкладом в (1.2) можно пренебречь.

Для нормального напряжения σ_z для квадратично нелинейного материала при плоском напряженном состоянии имеем [9]

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_x + E_1\varepsilon_x^2, \quad E_1 = \frac{E(1-2\nu)}{9(1-\nu)^2}k. \tag{1.5}$$

На основании (1.1), (1.2) и (1.5) уравнения движения в перемещениях запишем в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \sigma_{xz}^{+} - \sigma_{xz}^{-} = \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{E_1 h^2}{6}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\}$$
$$+\sigma_z^{+} - \sigma_z^{-} = \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1.6}$$
$$T = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{E_1 h^2}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2.$$

Уравнение индукции в пластине (в эйлеровых координатах) есть

$$\left.\frac{\partial \overline{h}}{\partial t}\right|_{\xi,\eta} = \operatorname{rot}(\overline{v} \times \overline{H}). \tag{1.7}$$

Если перейти к лагранжевым координатам

$$\xi = u_x + x, \quad \eta = u_z + z, \tag{1.8}$$

то для компонент $\overline{h}$ в новой системе будем иметь

$$\left.\frac{\partial h_x}{\partial t}\right|_{x,z} = -H_0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial w}{\partial x}\Phi - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\left(\frac{\partial h_x}{\partial x}\Phi - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial h_x}{\partial z}\right) +$$

$$+\frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial h_x}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial h_x}{\partial z}\right),$$

$$\left.\frac{\partial h_z}{\partial t}\right|_{x,z} = H_0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\left[1 - \Phi + \Phi^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\partial f}{\partial x}\Phi - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + \tag{1.9}$$

$$+\Phi\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\left(\frac{\partial h_z}{\partial x} - \frac{\partial h_z}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial h_z}{\partial x}F + \frac{\partial h_z}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right],$$

где

$$f = h_x\frac{\partial w}{\partial t} - h_z\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right),$$

$$\Phi = 1 - \frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad F = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Решение системы (1.6) и (1.9) будем искать в виде

$$w = a\cos\theta, \quad u = b\sin 2\theta, \quad \theta = \omega t - kx, \tag{1.10}$$

$$h_x^{(1)} = 0, \quad h_z^{(1)} = H_0 ak\sin\theta,$$

$$h_x^{(2)} = \frac{1}{2}H_0a^2k^2\cos 2\theta, \quad h_z^{(2)} = -\frac{z}{2}H_0a^2k^3\sin 2\theta, \tag{1.11}$$

$$h_x^{(3)} = zH_0a^3k^4(\cos\theta - \cos^3\theta), \quad h_z^{(3)} = \frac{1}{6}H_0a^3k^4(\sin 3\theta - 2\sin^3\theta).$$

Произведя аналогичные процедуры для компонент магнитного поля в диэлектрике вне пластинки, где сделан переход к лагранжевым координатам, и удовлетворяя условию непрерывности нормальной компоненты на внешних плоскостях пластинки $z = \pm h/2$, окончательно для $h_z^{\pm}$ получим

$$h_z^{\pm} = \pm H_0ak\cos\theta - \frac{H_0}{2}a^2k^2. \tag{1.12}$$

Из условий непрерывности компонент тензора полных напряжений получим

$$\sigma_{xz}^{+} - \sigma_{xz}^{-} = \frac{1}{4\pi}H_0^2a^2k^2\sin 2\theta, \quad \sigma_z^{+} - \sigma_z^{-} = -\frac{H_0^2}{2\pi}ak\left(1 - \frac{1}{2}a^2k^2\right)\cos\theta. \tag{1.13}$$

Система (1.6) с (1.10) и (1.13) дает выражение нелинейной частоты

$$\omega^2 = \omega_0^2 + a^2 \cdot \Lambda, \tag{1.14}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\rho h}\left(Dk^4 + \frac{H_0^2}{2\pi}k\right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$\Lambda = \frac{k^4}{\rho h}\left[\frac{Eh}{4}\left(1 + \frac{E_1 h^2}{6E}k^2\right) + \frac{E_1 h_1^3}{64}k^2\left(1 - \frac{E_1 h^2}{12E}k^2\right) - \frac{3H_0^2}{16\pi k}\right]. \tag{1.15}$$

2. Как известно [10], в адиабатическом приближении устойчивость распространения волн модуляции определяется

$$\frac{d^2\omega_0}{dk^2} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial a^2} > 0. \tag{2.1}$$

В отсутствие магнитного поля

$$\frac{d^2\omega_0}{dk^2} > 0, \tag{2.2}$$

и при учете только геометрической нелинейности

$$\frac{\partial\omega}{\partial a^2} > 0, \tag{2.3}$$

следовательно, имеется устойчивость волн модуляции.

При наличии только физической квадратичной нелинейности, как и в случае кубической нелинейности для металлов

$$\frac{\partial\omega}{\partial a^2} < 0, \tag{2.4}$$

имеется неустойчивость [4,11].

Наличие магнитного поля может изменить знак ω_0''. В частности, при

$$\frac{H_0^2}{4\pi} > Dk^3(4 + 3\sqrt{2}) \tag{2.5}$$

уже ω_0'' меньше нуля, причем $\frac{\partial\omega}{\partial a^2}$ может быть как больше, так и меньше нуля.

Следовательно, в зависимости от соотношений физической и геометрической нелинейностей и значений начального магнитного поля возможны случаи как устойчивости, так и неустойчивости волн модуляции.

Интересно, что для сильных полей отрицательны и ω_0'' и $\frac{\partial\omega}{\partial a^2}$, т.е. имеется устойчивость распространения.

Институт механики НАН РА

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա. Գ. Բագդոև, Լ. Ա. Մովսիսյան

Երկայնական մագնիսական դաշտում ոչ գծային ալիքների տարածման մոդուլյացիայի պրոբլեմի մասին

Դիտարկվում է սալի ֆիզիկական (քառակուսային) և երկրաչափական ոչ գծային ալիքների տարածման խնդիրը, երբ այն գտնվում է համասեռ մագնիսական դաշտում: Մագնիսական ինդուկցիայի հավասարումներում կոորդինատների ձևափոխումով (Էյլերյանից-լագրանժյան) ստացված է սալի տատանումների դիսպերսիոն հավասարումը: Ստացված են պայմաններ, երբ կարող է ալիքների տարածման մոդուլյացիան լինել կայուն կամ անկայուն:

Corresponding member of NAS RA A. G. Bagdoev, L. A. Movsisyan

On the Problem of Propagation of Nonlinear Modulation Waves in Plate in Longitudinal Magnetic Field

The problem of investigation of nonlinear bending vibrations in magnetoelastic plate is considered. The equations of motion and induction in plate and equations of induction out of it are written in Lagrangian coordinates. The solution in the form of the first, second and thirth harmonics to the cubic terms of the small amplitude is obtained, as well as the nonlinear dispersion relation on the consideration geometrical and quadratic physical nonlinearities. The conditions on the parameters of plate and field for the investigation of the stability of nonlinear waves are obtained.

Литература

1. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1979. Т.32. №5. С.25-37.

2. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1980. Т.33. №3. С.29-40.

3. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* – Изв. АН СССР. МТТ. 1981. №4. С.169-177.

4. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. Т.35. №1. С.16-22.

5. *Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1985. Т.38. №2. С.17-29

6. *Аветисян А. С.* – Нелинейные явления при распространении поверхностной электроупругой волны в пьезоэлектрической среде. Автореф. докт. дис. Ереван. 1997. 30 с.

7. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука. 1977. 272 с.

8. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. Наука. 1972. 432 с.

9. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М. ИЛ. 1961. 777 с.

10. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М. Мир. 1977. 622 с.

11. *Мовсисян Л. А.* В кн.: Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести. (Сб. научных тр., посвященный 75-летию академика НАН РА М. А. Задояна). Ереван. 2006. С. 232-236.