УДК 519.1

С. М. Варданян

О длинах тупиковых распознающих систем в классе двухэлементных подмножеств

(Представлено чл.-кор. НАН РА И.Д. Заславским 15/XII 2006)

Ключевые слова: *распознающие системы, пересечение множеств, тупиковость, максимальная мощность*

Рассматривается вопрос о количестве элементов в тупиковых множествах (системах), принадлежащих классу двухэлементных множеств и распознающих данное конечное множество. Напомним вначале некоторые определения из [1-3]. Рассмотрим конечное множество $[n] = \{1,2,\ldots n\}$, $n \geq 3$. Через $R[n]$ обозначим множество подмножеств множества $[n]$. Пусть n^* является подмножеством множества $R[n]$.

Определение 1. *Будем говорить, что элемент* $i \in [n]$ *распознаваем в* n^*, *если в* n^* *существуют такие подмножества множества* $[n]$ *(как элементы множества* n^**), пересечение которых равняется* $\{i\}$.

Определение 2. *Будем говорить, что* n^* *распознает множество* $[n]$, *если любой элемент* $i \in [n]$ *распознаваем в* n^*.

С формальной точки зрения, так как $R[n]$ распознает множество $[n]$, то класс распознающих множеств (систем) для $[n]$ заведомо не является пустым.

В дальнейшем будут рассматриваться только такие распознающие системы, которые состоят лишь из двухэлементных множеств, и это ограничение в данной статье будет всюду подразумеваться. В частности, говоря о минимальности и тупиковости распознающих систем, мы будем рассматривать эти понятия лишь в рамках указанного класса распознающих систем. Определим классические понятия минимальности и тупиковости для вышеупомянутых обьектов.

Определение 3. *Множество* n^*, *распознающее* $[n]$, *называется тупиковым, если любое собственное подмножество множества* n^* *не распознает* $[n]$.

Определение 4. *Множество* n^*, *распознающее* $[n]$, *называется минимальным, если не существует множества, распознающего* $[n]$, *с мощностью меньшей, чем* $|n^*|$.

Если рассматривается минимум (максимум) не в классе всех распознающих систем, а только в определенном его подклассе, то такие минимумы (максимумы) иногда будем называть локальными минимумами (максимумами).

Пусть n^* является распознающей системой, причем все ее элементы взяты только из класса двухэлементных подмножеств. Любой такой распознающей системе можно сопоставить граф следующим образом: каждому элементу $i \in [n]$ поставим в соответствие вершину с номером i, а каждому множеству $i, j \in n^*$ поставим в соответствие ребро между вершинами с номерами i и j. В [1] доказано, что мощность минимальной распознающей системы в классе двухэлементных подмножеств $|n^*| \geq n$. Там же приведен пример распознающей тупиковой системы с мощностью $2(n - 2)$. В данной статье доказываются следущие теоремы.

Теорема 1. *При* $n \geq 4$ *мощность любой тупиковой распознающей системы в классе двухэлементных подмножеств* $\leq 2(n - 2)$.

Теорема 2. *При* $n > 4$ *для каждого* j *в интервале* $n \leq j \leq 2(n - 2)$ *в классе двухэлементных подмножеств существует тупиковая распознающая система мощностью* j.

Сначала приведем некоторые леммы.

Лемма1. *Для того, чтобы элемент* i *был распознаваем в данной системе* n^*, *необходимо и достаточно, чтобы существовали хотя бы два различных множества в* n^*, *содержашие элемент* i.

Утверждение леммы следует непосредственно из определений.

Из леммы 1 очевидным образом вытекают нижеследующие леммы 2 и 3.

Лемма 2. *Для того, чтобы* n^* *было распознающим, необходимо и достаточно, чтобы при любом* i *в интервале* $1 \leq i \leq n$ *в* n^* *существовали хотя бы два различных подмножества, содержащие элемент* i.

Лемма 3. *Для того, чтобы* n^* *было распознающим, необходимо и достаточно, чтобы в соответствующем графе локальная степень каждой вершины была* ≥ 2.

Учитывая лемму о рукопожатиях в теории графов [3] (число ребер в графе равно половине суммы локальных степеней всех вершин) и опираясь на неравенство $|n^*| \geq n$, получим следующую лемму.

Лемма 4. *Для того, чтобы распознающая система* n^* *для* $[n]$ *была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы в соответствующем графе локальная степень каждой вершины была равна* 2.

С другой стороны, легко убедиться в том, что если в графе локальная степень каждой вершины равна 2, то этот граф или является простым циклом, содержащим все вершины графа, или компоненты связности его являются простыми циклами, причем каждая вершина находится в каком-то цикле. Через ρ_2 обозначим множество всех вершин графа, локальная степень которых равна 2. Через ρ_3 обозначим множество всех тех вершин графа, локальная степень которых ≥ 3. Для распознающей системы каждая вершина принадлежит или ρ_2, или ρ_3. Ясно, что если n^* является минимальной, то для таких систем ρ_3 пустое (на основании леммы 4). Легко убедиться в том, что при $n = 3$ и $n = 4$ соответствующие распознающие системы {1,2}, {2, 3}, {1, 3} и {1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, {1, 4} являются единственными тупиковыми системами (с точностью до переименования элементов без повторений).

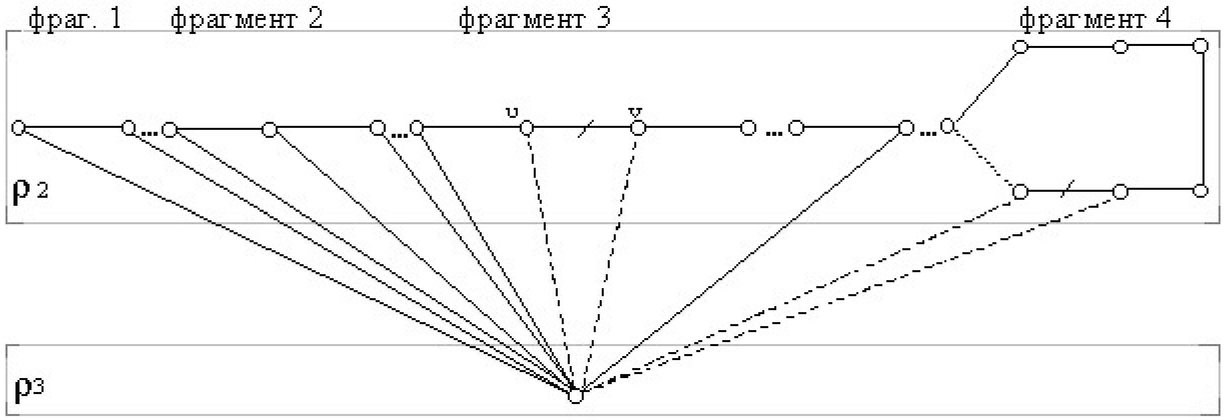


Рис 1.

Лемма 5. *Для тупиковой распознающей системы* ρ_2 *не пусто.*

Действительно, пусть ρ_2 пусто. Тогда локальная степень каждой вершины ≥ 3. Возьмем некоторое ребро и удалим из графа. Получим, что локальная степень каждой вершины будет ≥ 2, и по леммам 1 и 2 этого достаточно, чтобы система была распознающей. Но это противоречит тупиковости данной системы. Лемма доказана. С другой стороны, если ρ_3 пусто, то соответствующая распознающая система по лемме 4 будет минимальной.

Следствие. Если при $n \geq 5$ распознающая система тупиковая и не минимальная, то одновременно и ρ_2 и ρ_3 непусты.

Лемма 6. *Если в тупиковой распознающей системе* $|\rho_3| \geq 2$*, то любые вершины* u *и* v*, локальная степень которых* ≥ 3*, не могут быть смежными.*

Доказательство леммы 6 аналогично доказательству леммы 5. Для неминимальных тупиковых систем при $n = 5$ возможны два случая: (1) множество ρ_3 содержит только один элемент; (2) множество ρ_3 содержит больше одного элемента. Следовательно, учитывая лемму 6 и следствие леммы 5, получаем, что распознающие тупиковые не минимальные системы могут быть двух типов: первый тип, показанный на рис. 1, и второй тип, показанный на рис. 2.

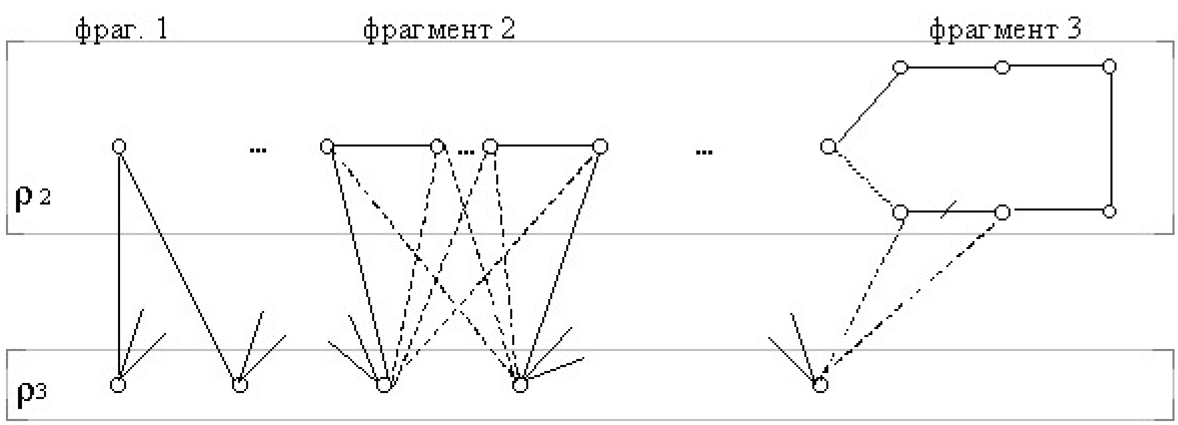
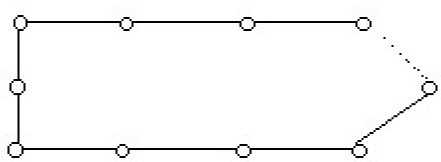
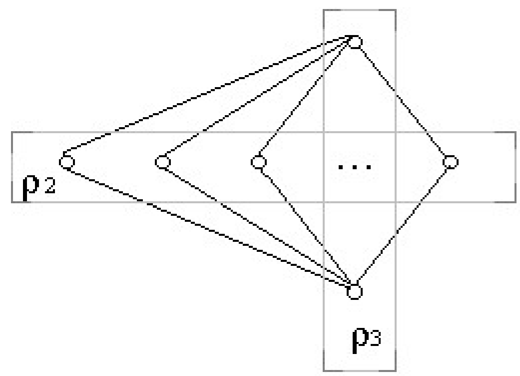


Рис 2.

Легко проверить, что любая тупиковая конструкция первого типа имеет следующий вид: множество ρ_3 состоит только из одного элемента, а вершины, принадлежащие ρ_2, составляют цепь длиною 2 (рис. 1, фрагмент 1: под длиною цепи в данной статье понимается число вершин в цепи), или длиною 3 (рис. 1, фрагмент 2), или длиною k, $k \geq 4$ (рис. 1, фрагмент 3), или составляют простой цикл длиною k, $k \geq 3$ (рис. 1, фрагмент 4). Легко проверить также, что любая тупиковая конструкция второго типа имеет следующий вид (рис. 2): все вершины, принадлежащие ρ_3, попарно не смежны по лемме 6, а для вершин, принадлежащих ρ_2, возможны следующие случаи: могут быть вершины, которые смежны только с вершинами, принадлежащими ρ_3 (рис. 2, фрагмент 1), или могут быть вершины, которые составляют цепь длиною k, $k \geq 2$ (рис. 2, фрагмент 2), или могут быть вершины, которые составляют простой цикл длиною k, $k \geq 3$ (рис. 2, фрагмент 3). Во всех случаях концевые вершины цепей смежны с вершинами, принадлежащими ρ_3.



а



б

Рис 3.

В дальнейшем максимальной конструкцией первого (соответственно, второго) типа будем называть распознающую систему n^*, являющуюся тупиковой и такой, что всякая тупиковая система первого (соответственно, второго) типа, распознающая [n], имеет мощность, не превосходящую $|n^*|$.

Лемма 7. *В максимальных конструкциях первого типа (локальный максимум) количество фрагментов* 3 *и* 4 *должны быть* 0, *а количество фрагментов* 2 *есть* 0 *при нечетном* n *и* 1 *при четном* n.

Действительно, фрагмент 4 длиною k можно заменить фрагментом 2 или 3 длиною k, тем самым число ребер будет увеличиваться на единицу. Далее, из фрагментов 3, удаляя ребра между вершинами, принадлежащими ρ_2, через одну и взамен добавляя ребра между вершиной, принадлежащей ρ_3, и вершинами, инцидентными удаленному ребру (на рис.1 ребро (u, v) заменено ребрами, показанными пунктирными линиями), можно избавиться от фрагментов 3, причем число ребер будет только увеличиваться. Так как все вершины, принадлежащие ρ_2, после преобразований будут снова принадлежать ρ_2, то новая конструкция будет тупиковой. Если в конструкции будет больше одного фрагмента 2, то взамен двух фрагментов 2 можно брать 3 фрагмента 1, которые содержат 9 ребер (на одно больше, чем два фрагмента 2).

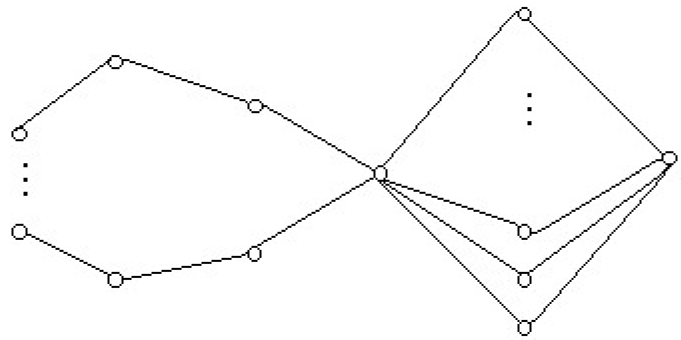


Рис 4.

Следствие. Максимальная конструкция первого типа будет содержать 1.5(n – 1) ребер при нечетном n и 1.5(n – 4) + 4 ребер при четном n.

Лемма 8. *В максимальных конструкциях второго типа (локальный максимум) количество фрагментов* 2 *и* 3 *должно быть равно нулю.*

Действительно, фрагмент 3 длиною k с k ребрами можно заменить k фрагментами 1 с 2k ребрами, а фрагмент 2 длиною k с k – 1 ребрами можно заменить k фрагментами 1 с числом ребер 2(k – 1). Следовательно, максимальная конструкция второго типа состоит только из фрагментов 1. На рис. 2 пунктирными линиями показаны новые ребра взамен ребер между вершинами, принадлежащими ρ_2. Ясно, что после преобразований полученная конструкция останется тупиковой, так как все вершины, принадлежащие ρ_2, будут оставатся в ρ_2 (один конец любого ребра принадлежит ρ_2).

Следствие. Максимальная конструкция второго типа является двудольным графом между вершинами из ρ_2 и ρ_3.

Лемма 9. *Для максимальных конструкций второго типа имеет место* $|\rho_3| = 2$.

Ясно, что число ребер в двудольном графе равно сумме локальных степеней вершин, принадлежащих ρ_2 (или ρ_3). Пусть $|\rho_3| = t$. Тогда число ребер в графе будет $2(n – t)$, так как $|\rho_2|$ равно $n – t$. А максимум $2(n – t)$ при условии $t \geq 2$ достигается при $t = 2$.

Следствие. Максимальная конструкция второго типа (локальный максимум) содержит 2(n – 2) ребер.

Доказательство теоремы 1 завершается сравнением двух локальных максимумов 1.5(n – 1) или 1.5(n – 4) + 4 с одной стороны, 2(n – 2) с другой. При n = 5 обе конструкции имеют 6 ребер, а для $n \geq 6$ максимальным является 2(n – 2). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Докажем, что с помощью двух конструкций, минимальной (рис. 3, а) и максимальной (рис. 3, б), можно построить при любом j, $n \leq j \leq 2(n – 2)$, новую тупиковую конструкцию, которая содержит ровно j ребер. Заметим, что при n = 5 2(n – 2) = 6, причем минимальная конструкция содержит 5 ребер, а максимальная - 6 ребер. Рассмотрим случай $n \geq 6$. Определим операцию склеивания двух конструкций. Склеенная конструкция получается посредством отождествления некоторой вершины минимальной конструкции с некоторой вершиной из максимальной конструкции, принадлежащей ρ_3 (рис. 4). Заметим, что максимальная конструкция, состоящая из четырех вершин, является простым циклом, для которого множество ρ_3 пусто. В этом случае склеивается некоторая вершина минимальной конструкции с некоторой вершиной максимальной конструкции. Новая конструкция будет содержать n вершин. Пусть максимальная конструкция содержит i вершин без склеенной вершины, $i \geq 3$. Тогда минимальная конструкция будет содержать $n - i$ вершин (со склеенной вершиной). Легко убедиться в том, что построенная конструкция явлется тупиковой, так как хотя бы один конец любого ребра принадлежит множеству ρ_2. Число ребер в минимальной части равно $n - i$, а число ребер в максимальной части $2(i + 1 - 2) = 2(i - 1)$. Следовательно, число ребер в целом будет $n - i + 2(i - 1) = n + i - 2$. При $i = 3$ получим $n + 1$ ребер, при $i = 4$ получим $n + 2$ и т.д., при $i = n - 3$ получим $n + (n - 3) - 2 = 2n - 5$ ребер. Только минимальная конструкция содержит n ребер, а только максимальная конструкция - $2(n - 2)$ ребер.

Теорема 2 доказана.

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Литература

1. *Варданян С.М.* - Тр. Ин-та проблем информатики и автоматизации. Мат. вопросы кибернетики и вычислительной техники. Ереван. 2005. Т. 24. С.144-146.

2. *Vardanyan S.M.* Computer science and information technologies. Proceedings of the conference CSIT. Yerevan. Armenia. 2005. P. 161-162.

3. *Harary F.* Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

Ս.Մ. Վարդանյան

Երկէլեմենտ ենթաբազմությունների դասում փակուղային ճանաչող համակարգերի երկարության մասին

$[n]=\{1,2,\dots n\}$ վերջավոր բազմության ենթաբազմությունների համակարգը կոչվում է $[n]$-ը ճանաչող, եթե կամայական մեկ էլեմենտանոց բազմության $\{i\}, 1\leq i\leq n$, կարելի է ներկայացնել այդ համակարգի ինչ-որ բազմությունների հատման միջոցով: Դիտարկվում են այնպիսի համակարգեր, որոնք պարունակում են միայն երկէլեմենտ ենթաբազմություններ: Այդպիսի համակարգը կոչվում է մինիմալ, եթե գոյություն չունի ավելի փոքր հզորության ճանաչող համակարգ, և կոչվում է փակուղային, եթե այդ համակարգի ցանկացած խիստ ենթահամակարգ չի ճանաչում $[n]$-ը: Ապացուցվում է, որ (1) ներկայացված տեսքի ցանկացած փակուղային ճանաչող համակարգի հզորությունը $\leq 2(n-2)$; (2) կամայական j-ի համար $n\leq j\leq 2(n-2)$, գոյություն ունի նկարագրված տեսքի փակուղային ճանաչող համակարգ՝ j հզորության:

S. M. Vardanyan

On the Lengths of Deadlock Recognizing Systems in the Class of Subsets, Consisting of Two Elements

A system S of subsets of the set $[n]=\{1,2,\dots n\}$ is said to be recognizing $[n]$, if every set $\{i\}, 1\leq i\leq n$, can be represented as an intersection of sets belonging to S. Only subsets containing two elements are considered. A recognizing system S of such subsets is said to be minimal if there is no recognizing system having the power less than S; it is said to be deadlock if every its proper subsystem is not recognizing. It is proved that (1) every deadlock recognizing system of the mentioned kind has the power $\leq 2(n-2)$; (2) for every $j, n\leq j\leq 2(n-2)$ there exists a deadlock recognizing system of the mentioned kind having the power j.