УДК 517.518

Р. Г. Бархударян, А. В. Погосян

О сходимости одного квазиполиномиального приближения

(Представлено академиком А.Б. Нерсесяном 22/IX 2006)

Ключевые слова: *ряды Фурье, ускорение сходимости, квазиполиномиальный метод, асимптотические оценки*

1. Аппроксимация гладкой на конечном интервале $[-1,1]$ функции $f(x)$ частичным рядом Фурье

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{i\pi n x}, \quad f_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) e^{-i\pi n x} dx \tag{1}$$

неэффективна, если разлагаемая функция, продолженная 2-периодически на всю числовую ось, не обладает достаточной гладкостью. Это прежде всего относится к кусочно-гладким функциям.

В работах [1-3] разработан и изучен метод ускорения сходимости разложения , основанный на применении аппроксимантов Паде [4] к асимтотическому разложению коэффициентов Фурье . Результатом такого подхода является квазиполиномиальное приближение (QP-метод), которое обобщает хорошо известное ранее полиномиальное приближение (P-метод), изученное в работах [5-9]. Принципиальное значение имеет использование скачков разлагаемой функции и ее производных в точках разрыва. В настоящей работе продолжаются исследования, начатые в [1-3]. Основным результатом данной работы является точная L_2 константа асимптотической ошибки при аппроксимации гладкой функции методом QP, с приближенным вычислением скачков разлагаемой функции.

2. Для $f \in C^q[-1,1]$ обозначим

$$A_k = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1), \quad k = 0, \ldots, q.$$

Если $k < 0$, то примем $A_k = 0$. Рассмотрим теперь конечную последовательность комплексных чисел $\theta := \{\theta_k\}_{k=1}^{p}$, $p \ge 1$ и обозначим

$$\Delta_k^0(\theta) = A_k, \; k \le q, \quad \Delta_k^s(\theta) = \Delta_k^{s-1}(\theta) + \theta_s \Delta_{k-1}^{s-1}(\theta), \; k \le q, \; s \ge 1. \tag{2}$$

Следуя работам [1-3], рассмотрим следующее квазиполиномиальное приближение (QP-метод) для $f \in C^q[-1,1]$:

$$S_{N,q,m}(f) = Q(x) + S_N(P), \; 1 \le m \le q-1, \tag{3}$$

где

$$Q(x)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} Q_n e^{i\pi nx},\quad P(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{i\pi nx},\quad P_0=f_0, \tag{4}$$

$$Q_n=\frac{(-1)^{n+1}(i\pi n)^m}{2\prod_{s=1}^{m}(i\pi n+Q_s)}\sum_{k=0}^{q-m-1}\frac{\Delta_k^m(\theta)}{(i\pi n)^{k+1}}, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}P_n=f_n-Q_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q+1}}\sum_{k=1}^{m}\frac{\theta_k\Delta_{q-1}^{k-1}(\theta)(i\pi n)^k}{\prod_{s=1}^{k}(i\pi n+Q_s)}+\\ +\frac{(-1)^{n+1}(i\pi n)^m}{2\prod_{k=1}^{m}(i\pi n+\theta_k)}\sum_{k=q-m}^{q-1}\frac{\Delta_k^m(\theta)}{(i\pi n)^{k+1}}+\frac{1}{2(i\pi n)^q}\int_{-1}^{1}f^{(q)}(t)e^{-i\pi nt}dt.\end{gathered} \tag{6}$$

Числа θ_k определим из системы

$$\Delta_k^m(\theta)=0,\quad k=q-m,\ \dots,\ q-1. \tag{7}$$

Важно отметить, что в случае $\theta_1=\theta_2=\dots=\theta_m=0$ метод QP совпадает с P-методом $S_{N,q}(f)$, определенным формулой

$$S_{N,q}(f)=\sum_{n=-N}^{N}\left(f_n-\sum_{k=0}^{q-1}A_kB_{k,n}\right)e^{i\pi n\,x}+\sum_{k=0}^{q-1}A_kB_k(x), \tag{8}$$

где функции $B_k(x)$ (2-периодическое продолжение на всю числовую ось полиномов Бернулли) имеют коэффициенты Фурье

$$B_{k,n}=\begin{cases}0, & n=0\\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{k+1}}, & n=\pm1,\pm2,\dots\end{cases} \tag{9}$$

Обозначим теперь через $\|\cdot\|$ норму в пространстве $L_2[-1,1]$. Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $q\ge 0$, $f\in C^q[-1,1]$ *и* $f^{(q)}\in AC[-1,1]$. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} N^{q+[1/2]}\|f-S_{N,q}(f)\|=|A_q|c_1(q),\quad c_1(q)=\frac{1}{\pi^{q+1}\sqrt{2q+1}}. \tag{10}$$

Обозначим $U_r^m=(A_{k-s+r})_{k,s=1}^m$.

Теорема 2. *Пусть* $q\ge 1$, $f\in C^q[-1,1]$ *и* $f^{(q)}\in AC[-1,1]$. *Если*

$$\det U_{q-m-1}^m\neq 0,\quad m\le q-1,$$

и последовательность $\{\theta\}$ *определена из системы* (7), *то имеет место оценка*

$$\lim_{N\to\infty} N^{q+[1/2]}\|f - S_{N,q,m}(f)\| = d_{1,m}(q), \quad d_{1,m}(q) = \left|\frac{\det U_{q-m}^{m+1}}{\det U_{q-m-1}^{m}}\right| c_1(q). \tag{11}$$

Сравнив формулы $S_{N,q}$ и $S_{N,q,m}$, мы видим, что, - при использовании тех же скачков $\{A_k\}_{k=1}^{q}$, - порядок сходимости к f одинаков. Однако применение предлагаемой нелинейной аппроксимации потенциально предпочтительней по той простой причине, что она точная (при достаточно больших q, m и точном определении скачков) для квазиполиномов, т.е. для функций вида $\sum_{s=1}^{p} a_s x^{n_s} e^{w_s x}$, где $\{n_s\}$ целые неотрицательные числа и $\{w_s\} \subset C$, в то время как P-метод точен только для полиномов.

3. Практическое применение аппроксимации $S_{N,q}$ и $S_{N,q,m}$ связано с приближенным определением скачков A_k. Как показано, например в [8] и [9], приближенные значения $\tilde{A}_k$ скачков A_k можно вычислить с помощью коэффициентов Фурье. Заметив, что величины $f_n - \sum_{k=0}^{q-1} A_k B_{k,n}$ асимптотически убывают для больших $|n|$, получим следующую систему линейных уравнений для определения приближенных скачков $\tilde{A}_k$, $k = 0, \ldots, q-1$:

$$f_n = \sum_{k=0}^{q-1} \tilde{A}_k B_{k,n}, \quad n = n_1, n_2, \ldots, n_q. \tag{12}$$

Таким образом, для данного N выбираются q различных индексов

$$n_1 = n_1(N),\ n_2 = n_2(N),\ \ldots,\ n_q = n_q(N)$$

для решения системы . Решая, получим значения $\tilde{A}_k$, которые, как показывает нижеследующая теорема, аппроксимируют скачки A_k для больших N.

Теорема 3. *Пусть* $q \ge 1$ *и индексы* $n_s = n_s(N)$ *выбраны так, что*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{n_s}{N} = c_s \ne 0, \quad s = 1, \ldots, q, \tag{13}$$

и пусть α *наибольшее число одинаковых элементов в последовательности* $c_1, c_2, \ldots, c_q$.

Тогда для $f \in C^{q+\alpha-1}[-1,1]$, $f^{(q+\alpha-1)} \in AC[-1,1]$, *имеет место оценка*

$$\tilde{A}_j = A_j - A_q \frac{\chi_j}{(i\pi N)^{q-j}} + o(N^{-q+j}), \quad N \to \infty, \quad j = 0, \ldots, q-1, \tag{14}$$

где константы χ_j являются коэффициентами следующего полинома:

$$\prod_{s=1}^{q}\left(x-\frac{1}{c_s}\right)=\sum_{s=0}^{q}\chi_s x^s. \tag{15}$$

Если в $S_{N,q}$ используются приближенные значения $\widetilde{A}_k$, то соответствующую аппроксимацию обозначим через $\widetilde{S}_{N,q}$:

$$\widetilde{S}_{N,q}(f) = \sum_{n=-N}^{N}\left(f_n-\sum_{k=0}^{q-1}\widetilde{A}_k B_{k,n}\right)e^{i\pi n x}+\sum_{k=0}^{q-1}\widetilde{A}_k B_k(x). \tag{16}$$

Следующая теорема характеризует аппроксимацию $\widetilde{S}_{N,q}$ в L_2-метрике.

Теорема 4. *Пусть условия теоремы 3 выполнены. Тогда имеет место следующая асимптотическая оценка:*

$$\lim_{N\to\infty} N^{q+[1/2]}\,\| f-\widetilde{S}_{N,q}\| = |A_q|c_2(q), \tag{17}$$

где

$$c_2(q)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi^{q+1}}\left(\int_{-1}^{1}\prod_{s=1}^{q}\left(x-\frac{1}{c_s}\right)^2 dx\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Если в $S_{N,q,m}$ используются приближенные значения $\widetilde{A}_k$, то соответствующую аппроксимацию обозначим через $\widetilde{S}_{N,q,m}$:

$$\widetilde{S}_{N,q,m}(f) = \widetilde{Q}(x)+\sum_{n=-N}^{N}\left(f_n-\widetilde{Q}_n\right)e^{i\pi n x}, \tag{19}$$

где

$$\widetilde{Q}_n=\frac{(-1)^{n+1}(i\pi n)^m}{2\prod_{s=1}^{m}(i\pi n+\eta_s)}\sum_{k=0}^{q-m-1}\frac{\delta_k^m(\eta)}{(i\pi n)^{k+1}}, \tag{20}$$

числа $\delta_k^m(\eta)$ определены рекуррентно

$$\delta_k^0(\eta)=\widetilde{A}_k,\ \delta_k^s=\delta_k^{s-1}(\eta)+\eta_s\delta_{k-1}^{s-1}(\eta),\ k\ge 1,$$

а последовательность $\eta=\{\eta_k\}_{k=1}^{m}$ определяется из системы

$$\delta_k^m(\eta)=0,\quad k=q-m,\ \ldots,\ q-1. \tag{21}$$

После несложных вычислений получим

$$\widetilde{R}_{N,q,m}(f) := f(x) - S_{N,q,m}(f) = \sum_{|n|>N} P_n e^{i\pi nx} + \sum_{|n|>N} \left(Q_n - \widetilde{Q}_n\right) e^{i\pi nx}. \qquad (22)$$

Приведем теперь аналог теоремы 4 для аппроксимации $\widetilde{S}_{N,q,m}$ в частном случае $m = 1$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и* $A_{q-2} \neq 0$. *Тогда имеет место асимптотическая оценка*

$$\lim_{N\to\infty} N^{q+[1/2]} \| \widetilde{R}_{N,q,1}(f) \| = d_2(q), \qquad (23)$$

$$d_2(q) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi^{q+1}} \left(\int_{-1}^{1} \left| A_q \prod_{s=1}^{q} \left(x - \frac{1}{c_s} \right) - \frac{A_{q-1}^2}{A_{q-2}} x^q \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Сравнение теорем 1 и 4 показывает, что соотношение c_2/c_1 характеризует эффективность P-метода при использовании точных значений скачков ($S_{N,q}$) по сравнению со случаем, когда используются приближенные значения, полученные из системы $(\widetilde{S}_{N,q})$. Заметим, что указанное соотношение не зависит от конкретной функции, а зависит только от способа получения приближения к A_k. Например, можно показать, что при следующем выборе последовательности n_s $(m = [[q/2]])$

$$-N \le n_1, \ldots, n_m \le -N + c, \quad N - c \le n_1, \ldots, n_q \le N,$$

где c некоторая константа, $c_2(q)$ имеет вид

$$c_2(q) = \begin{cases} \dfrac{2^q q!}{\pi^{q+1}} \dfrac{1}{\sqrt{(2q+1)!}}, & q = 2m, \\[2ex] \dfrac{2^q q!}{\pi^{q+1}} \dfrac{\sqrt{(q+1)}}{\sqrt{q(2q+1)!}}, & q = 2m+1. \end{cases} \qquad (24)$$

С помощью формулы Стирлинга можно показать, что в этом частном случае

$$\frac{c_2(q)}{c_1(q)} \approx \begin{cases} (\pi q)^{1/4}, & q = 2m, \\[2ex] (\pi q)^{1/4} \sqrt{1 + \dfrac{1}{q}}, & q = 2m+1. \end{cases}$$

Соотношение $d_{1,1}(q)/d_2(q)$ также характеризует аппроксимационные свойства методов $S_{N,q,1}$ и $\tilde{S}_{N,q,1}$, только в этом случае это соотношение зависит не только от способа вычисления скачков, но и от конкретной функции (точнее, от ее скачков). Рассмотрим частный пример

$$f(x) = J_0(4x - 1), \tag{25}$$

здесь J_0 функция Бесселя. В таблице показано соотношение $d_{1,1}(q)\ /d_2(q)$ для при различных значениях q.

Соотношение $d_{1,1}(q)\ /d_2(q)$ для (25) при различных значениях q

q	2	3	4	5	6	7
$d_{1,1}(q)\ /d_2(q)$	1.14	0.83	1.46	0.97	1.54	0.96

Как видим, в данном случае при нечетных значениях q использование приближенных значений $\tilde{A}_k$ приводит к более точной аппроксимации.

Рассмотрим еще несколько частных случаев ($m = 2$, $q = 3$ и $m = 3$, $q = 4$).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 3 при* $q = 3$ *и* $A_0 \neq 0$. *Тогда имеет место асимптотическая оценка*

$$\lim_{N\to\infty} N^{7/2}\, \| \tilde{R}_{N,3,2}(f) \| = d_3, \tag{26}$$

$$d_3 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi^4}\left(\int_{-1}^{1}\left|A_3\prod_{s=1}^{3}\left(x-\frac{1}{c_s}\right)+\frac{A_1^3-2A_0A_1A_2}{A_0^2}x^3\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 3 при* $q = 4$ *и* $A_0 \neq 0$. *Тогда имеет место асимптотическая оценка*

$$\lim_{N\to\infty} N^{9/2}\, \| \tilde{R}_{N,4,3}(f) \| = d_4, \tag{27}$$

$$d_4 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi^5}\left(\int_{-1}^{1}\left|A_4\prod_{s=1}^{4}\left(x-\frac{1}{c_s}\right)+\frac{3A_2A_0A_1^2-A_0^2A_1A_3-A_2^2A_0^2-A_1A_3A_0^2-A_1^4}{A_0^3}x^4\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Работа первого автора поддержана грантом NFSAT GRSP 18/06.

Институт математики НАН РА

Ռ.Հ. Բարխուդարյան, Ա.Վ. Պողոսյան

Մի քվազիբազմանդամային մոտարկման զուգամիտության մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է Ֆուրիեի շարքերի զուգամիտության արագացման՝ նախկինում առաջարկված մի եղանակ [1], որը հիմնված է Ֆուրիեի գործակիցների ասիմպտոտական վերլուծության նկատմամբ Պադեի ապրոքսիմանտների կիրառության վրա: Ինչպես ցույց է տրվել նախկինում՝ այս մոտեցումը բավական արդյունավետ է, և ըստ էության իրականացնում է զուգամիտության շտկում քվազիբազմանդամների օգնությամբ: Հիմնական պրոբլեմը մոտարկվող ֆունկցիայի թռիչքների մոտավոր մեծ ճշտությամբ հաշվումն է: Աշխատանքում ստացվել է ասիմպտոտական սխալի ճշգրիտ գնահատական մի մասնավոր դեպքի համար, երբ թռիչքները որոշվում են գծային համակարգի լուծման օգնությամբ:

R.H. Barkhudaryan, A.V. Poghosyan

On the Convergence of Some Quasipolynomial Approximation

In this article we invesigate a method of Fourier series acceleration for functions smooth in the interval [-1,1]. The main idea is the apllication of Pade approximants to an asymptotic expansion of Fourier coefficients. This approach is rather efficient and as was shown before actually corrects the Gibbs phenomenon by the means of quasipolynomials. The efficiency of realization is based on the precision of the approximate jumps calculating. Here we derive exact estimate in a particular case for asymptotic error when approximate jumps are calculated from a system of linear equations.

Литература

1. *Нерсесян А.Б.* - Доклады НАН Армении. 2004. Т. 104. N 4. С. 186-191.
2. *Нерсесян А.Б., Погосян А.В.* - Доклады НАН Армении. 2005. Т. 105. N 4. С. 309-316.
3. *Nersessian A.B., Poghosyan A.V.* - Central European Journal of Mathematics. 2006. V. 4. N 3. P. 435-448.
4. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М. Мир. 1986. 502 с.
5. *Крылов А.* Лекции по приближенным вычислениям. Л. Изд. АН СССР. 1933.
6. *Lanczos C.* - J. Soc. Indust. Appl. Math., Ser. B. Numer. Anal. 1964. V. 1. P. 76-85.
7. *Lanczos C.* - Discourse of Fourier Series. N.-Y. Hafner. 1966.
8. *Eckhoff K.S.* - Math. Comp. 1995. V. 64. N 210. P. 671-690.
9. *Eckhoff K.S., Wasberg C.E.* - Report no. 99. Dept. of Math. University of Bergen. 1995. P. 1-38.