УДК 539.3, 624.15

Академик Л. А. Агаловян, Р. Ж. Оганесян

О характере вынужденных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при смешанной краевой задаче

(Представлено 3/IV 2006)

Ключевые слова: *вынужденные колебания, анизотропия, упругость, амплитуда, резонанс, сейсмоизолятор*

Получено асимптотически точное решение пространственной смешанной задачи о вынужденных колебаниях трёхслойных ортотропных пластин. Показано, что наличие мягкого среднего слоя приводит к уменьшению амплитуд колебаний в вышестоящем слое. Теоретически обосновано применение сейсмоизоляторов.

1. Рассмотрим вынужденные колебания трёхслойной ортотропной пластинки: $D = \{(x,y,z) : x \in [0,a], y \in [0,b], 0 \le z \le h, h = h_1 + h_2 + h_3, h << \min(a,b)\}$ при условиях полного контакта между слоями, когда верхняя грань верхнего слоя свободна, а на лицевой поверхности нижнего слоя задан вектор перемещения, который во времени изменяется гармонически (рис.1).

Имеем граничные условия:

$$\sigma_{xz}^{I} = \sigma_{yz}^{I} = \sigma_{zz}^{I} = 0 \quad \text{при} \quad z = h, \tag{1.1}$$

$$u^{III}(z = 0) = u^{-}(\xi,\eta)\exp(i\Omega t),$$

$$v^{III}(z = 0) = v^{-}(\xi,\eta)\exp(i\Omega t), \tag{1.2}$$

$$w^{III}(z = 0) = w^{-}(\xi,\eta)\exp(i\Omega t),$$

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad l = \min(a,b)$$

и условия полного контакта:

$$\sigma_{xz}^{I} = \sigma_{xz}^{II}, \ \sigma_{yz}^{I} = \sigma_{yz}^{II}, \ \sigma_{zz}^{I} = \sigma_{zz}^{II}, \ u^{I} = u^{II}, v^{I} = v^{II}, w^{I} = w^{II} \text{ при } z = h_2 + h_3,$$

$$\sigma_{xz}^{II} = \sigma_{xz}^{III}, \ \sigma_{yz}^{II} = \sigma_{yz}^{III}, \ \sigma_{zz}^{II} = \sigma_{zz}^{III}, \ u^{II} = u^{III}, v^{II} = v^{III}, w^{II} = w^{III} \text{ при } z = h_3. \tag{1.3}$$

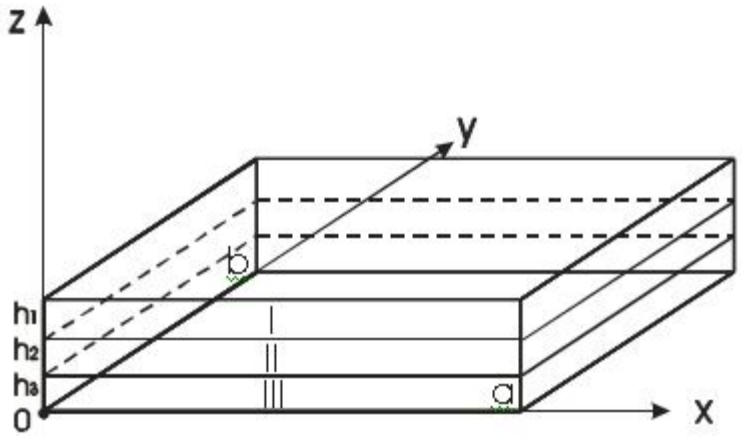


Рис.1.

Запишем систему динамических уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела для ортотропных сред:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial z} = \rho_k \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial t^2} \qquad (x, y, z; u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}),$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} = a_{11}^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_{yy}^{(k)} + a_{13}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k)} \qquad (u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}; x, y, z; 1,2,3),$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} = a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}, \quad \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} = a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)}, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial z} = a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)}, \quad k = I, II, III.$$

Решение системы уравнений (1.4) при граничных условиях (1.1), (1.2) и условиях контакта (1.3) будем искать в виде [1,2]

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}(x, y, z, t) = \sigma_{mj}^{(k)}(x, y, z) \exp(i\Omega t),$$

$$(u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}) = (u_x^{(k)}, u_y^{(k)}, u_z^{(k)}) \exp(i\Omega t) \tag{1.5}$$

$$\alpha, \beta = x, y, z, \quad m, j = 1, 2, 3, \quad k = I, II, III.$$

Подставив (1.5) в (1.4), затем перейдя к безразмерным координатам и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/h,$$

$$U^{(k)} = u_x^{(k)}/1, \quad V^{(k)} = u_y^{(k)}/1, \quad W^{(k)} = u_z^{(k)}/1, \tag{1.6}$$

где $h = h_1 + h_2 + h_3$, h_i - толщины слоёв, $l = \min(a,b)$ и $h << l$, k - номер слоя, получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему, решение которой будем искать в

виде асимптотического разложения [3]:

$$(U^{(k)},V^{(k)},W^{(k)}) = \varepsilon^{s}(U^{(k,s)},V^{(k,s)},W^{(k,s)}),$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{ij}^{(k,s)}, \quad s = \overline{0,N}, \quad k = I, II, III; \tag{1.7}$$

$s = \overline{0,N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование от 0 до числа приближений N. Подставив (1.7) во вновь полученную систему уравнений, определив коэффициенты разложения (1.7) и удовлетворив условиям (1.1) - (1.3), получим следующее решение:

$$U^{(k,s)} = \frac{f_{U1}^{(k,s)}}{\Delta_U}\cos\sqrt{a_{55}^{(k)}\rho_k}\,\Omega_*\zeta + \frac{f_{U2}^{(k,s)}}{\Delta_U}\sin\sqrt{a_{55}^{(k)}\rho_k}\,\Omega_*\zeta + U_{ч}^{(k,s)}$$

$$(U, V, W;\ a_{55}^{(k)}, a_{44}^{(k)}, 1/A_{11}^{(k)};\ b_{13}^{(k,s)}, b_{23}^{(k,s)}, b_{33}^{(k,s)}), \quad k = I, II, III. \tag{1.8}$$

Выражения $f_{U1}^{(k,s)}$ и $f_{U2}^{(k,s)}$ для произвольного s, а также значения величин Δ_U, Δ_V, Δ_W приведены в [2].

При s = 0 имеем

$$U^{(k,0)} = \frac{f_{U1}^{(k,0)}}{\Delta_U}\cos\sqrt{a_{55}^{(k)}\rho_k}\,\Omega_*\zeta + \frac{f_{U2}^{(k,0)}}{\Delta_U}\sin\sqrt{a_{55}^{(k)}\rho_k}\,\Omega_*\zeta, \tag{1.9}$$

где

$$f_{U1}^{(I,0)} = \Omega_*^2 U^{-(0)}\sqrt{\frac{\rho_{II}\rho_{III}}{a_{55}^{II}a_{55}^{III}}}\cos\sqrt{a_{55}^{I}\rho_I}\,\Omega_*,$$

$$f_{U2}^{(I,0)} = \Omega_*^2 U^{-(0)}\sqrt{\frac{\rho_{II}\rho_{III}}{a_{55}^{II}a_{55}^{III}}}\sin\sqrt{a_{55}^{I}\rho_I}\,\Omega_*.$$

$$f_{U1}^{(II,0)} = \frac{\Omega_*^2 U^{-(0)}}{2}\sqrt{\frac{\rho_{III}}{a_{55}^{III}}}\left[\left(\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} - \sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^{I}}}\right)\cos[(\sqrt{a_{55}^{I}\rho_I} - (\sqrt{a_{55}^{I}\rho_I} + \sqrt{a_{55}^{II}\rho_{II}})\zeta_2)\Omega_*] + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^{I}}} + \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\right)\cos[(\sqrt{a_{55}^{I}\rho_I} + (\sqrt{a_{55}^{II}\rho_{II}} - \sqrt{a_{55}^{I}\rho_I})\zeta_2)\Omega_*]\right], \tag{1.10}$$

$$f_{U2}^{(II,0)} = \frac{\Omega_*^2 U^{-(0)}}{2}\sqrt{\frac{\rho_{III}}{a_{55}^{III}}}\left[\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^{I}}} - \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\right)\sin[(\sqrt{a_{55}^{I}\rho_I} - (\sqrt{a_{55}^{I}\rho_I} + \sqrt{a_{55}^{II}\rho_{II}})\zeta_2)\Omega_*] + \right.$$

$$+\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}}+\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\right)\sin[(\sqrt{a_{55}^I\rho_I}+(\sqrt{a_{55}^{II}\rho_{II}}-\sqrt{a_{55}^I\rho_I})\zeta_2)\Omega_*]\Bigg]$$

$$(U, V, W; a_{55}^{(k)}, a_{44}^{(k)}, 1/A_{11}^{(k)}).$$

Здесь $\zeta_1 = (h_1 + h_2 + h_3) / h = 1$, $\zeta_2 = (h_2 + h_3) / h$, $\zeta_3 = h_3 / h$; $U^{-(0)} = u^- / l$, $V^{-(0)} = v^- / l$, $W^{-(0)} = w^- / l$ и $U^{-(s)} = V^{-(s)} = W^{-(s)} = 0$ при $s > 0$.

Аналогично записываются выражения $f_{U1}^{(III,0)}$ и $f_{U2}^{(III,0)}$.

Считаем, что $\Delta_U, \Delta_V, \Delta_W \neq 0$. Если Ω такова, что хотя бы одна из этих величин равна нулю, произойдёт резонанс. Эти значения Ω совпадают со значениями частот собственных колебаний [4].

2. Особый интерес представляет случай

$$u^- = \text{const}, \quad v^- = \text{const}, \quad w^- = \text{const}. \tag{2.1}$$

Уже приближению $s = 0$ соответствует точное решение:

$$u^{(k)} = \left(\frac{f_{U1}^{(k,0)}}{\Delta_U}\cos\sqrt{a_{55}^{(k)}\rho_k}\,\Omega_*\zeta + \frac{f_{U2}^{(k,0)}}{\Delta_U}\sin\sqrt{a_{55}^{(k)}\rho_k}\,\Omega_*\zeta\right)1\exp(i\Omega t) \tag{2.2}$$

$$(u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}; U, V, W; a_{55}^{(k)}, a_{44}^{(k)}, 1/A_{11}^{(k)}), \quad k = I, II, III.$$

Анализ этого решения при различных конфигурациях слоёв пакета позволяет сделать весьма важное для приложений, в частности для сейсмостойкого строительства, заключение.

Рассмотрим трёхслойный пакет, состоящий из слоёв СВАМ, стеклопластика СТЭТ и АСТТ, характеристики упругости которых приведены в [3], с толщинами соответственно $h_1 = 0.3$ м, $h_2 = 0.05$ м, $h_3 = 0.2$ м. Графики амплитуд колебаний по толщине пластинки приведены на рис. 2,а-в (сплошной линии соответствуют перемещения среднего слоя II, пунктирным - перемещения слоёв I, III).

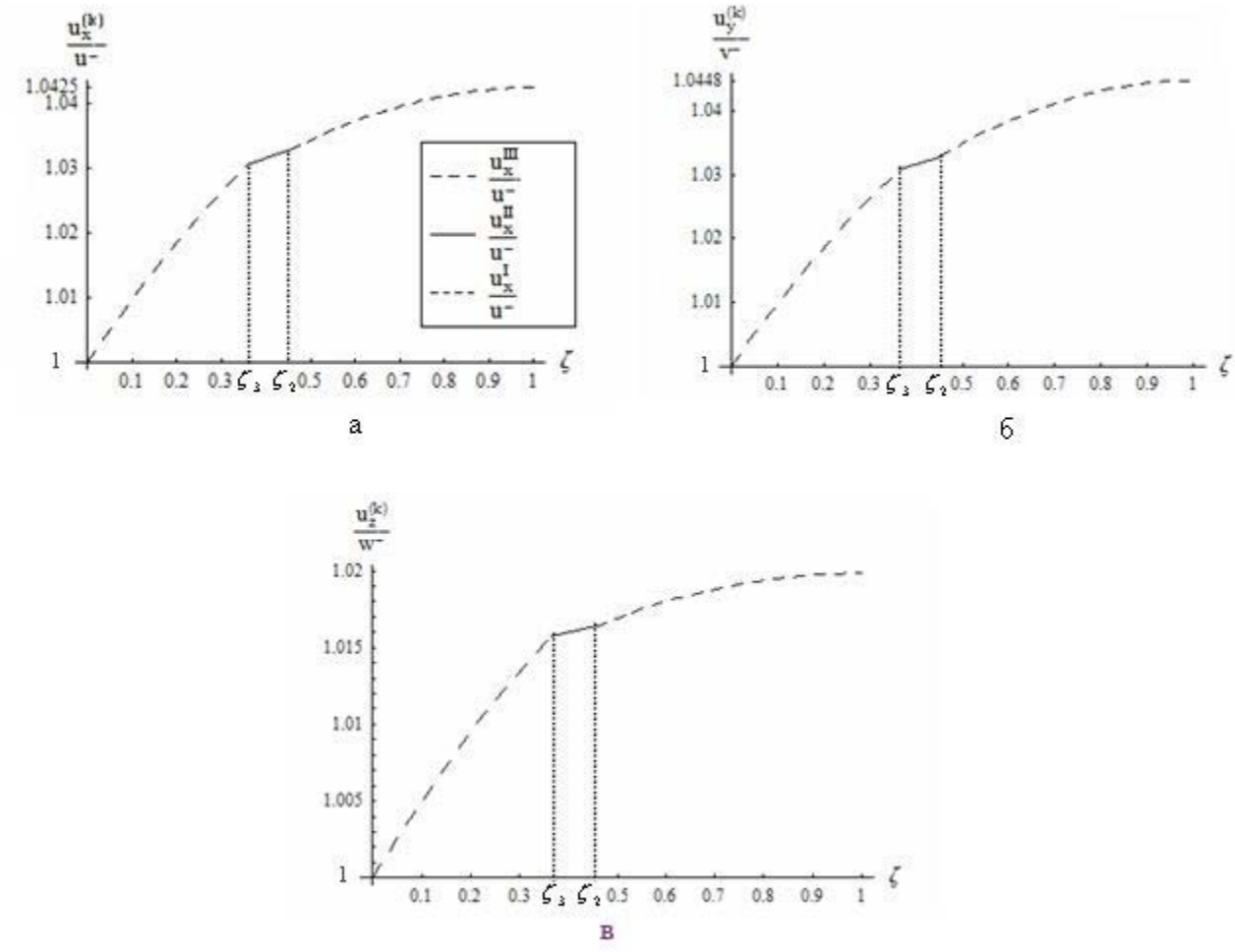
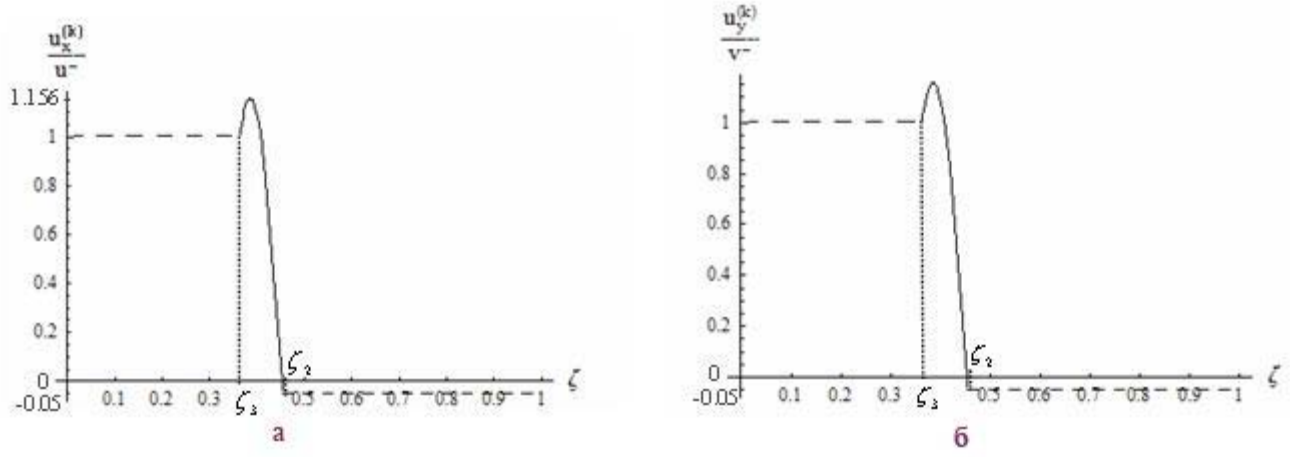


Рис.2

Теперь пусть верхний и нижний слои пакета состоят из слоёв стеклопластика СВАМ и АСТТ соответственно, а средний слой из резины (E = $6.96^{*}10^{5}$ Па, G = $2.4^{*}10^{5}$ Па, ρ = 1100 кг/м^{3}). Этому будут соответствовать рис. 3, а-в.



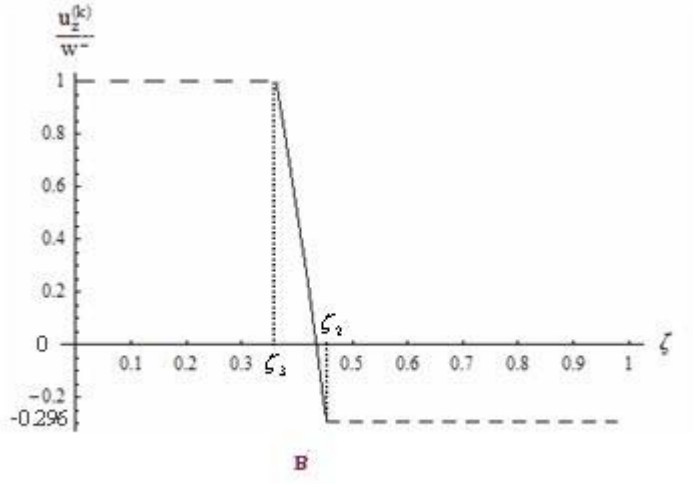


Рис. 3

Аналогичная картина наблюдается, когда верхний и нижний слои из бетона, а средний из резины.

Из приведённых графиков видно, что если все три слоя состоят из жестких схожих материалов, то амплитуды колебаний вырастают (хоть и незначительно) от слоя к слою. При наличии же среднего слоя из более мягкого материала (например, резины), амплитуды колебаний в верхнем слое резко уменьшаются. Этот результат сохраняет силу и при иных толщинах среднего мягкого слоя. Установленный выше факт можно использовать в сейсмостойком строительстве. Если при построении сооружений между бетонным фундаментом и основанием вставить тонкий слой резины, это приведёт к уменьшению опасных колебаний в фундаменте и, как следствие, к увеличению сейсмостойкости сооружения.

3. Рассмотрим ту же задачу, но с другими граничными условиями. Предполагается, что верхняя грань верхнего слоя жёстко закреплена, т.е. в условиях (1.1) вместо $\sigma_{xz}^{I} = \sigma_{yz}^{I} = \sigma_{zz}^{I} = 0$ имеем $u^I = v^I = w^I = 0$ при z = h. В этом случае, опять - таки решив уравнения (1.4) при изменённых граничных условиях, получим решение в виде (1.8), но с другими функциями $f_{Pj}^{(k,s)}$ (P = U,V,W; j = 1,2; k = I,II,III). В частности, условиям (2.1) будет соответствовать решение (1.8), (1.9), а в (1.10) необходимо заменить sin на (–cos), cos на sin. На рис. 4, а-в изображены изменения амплитуд тангенциального смещения U по толщине пластинки при следующих комбинациях пакета: СВАМ, СТЭТ, АСТТ; СВАМ, резина, АСТТ; бетон, резина, бетон.

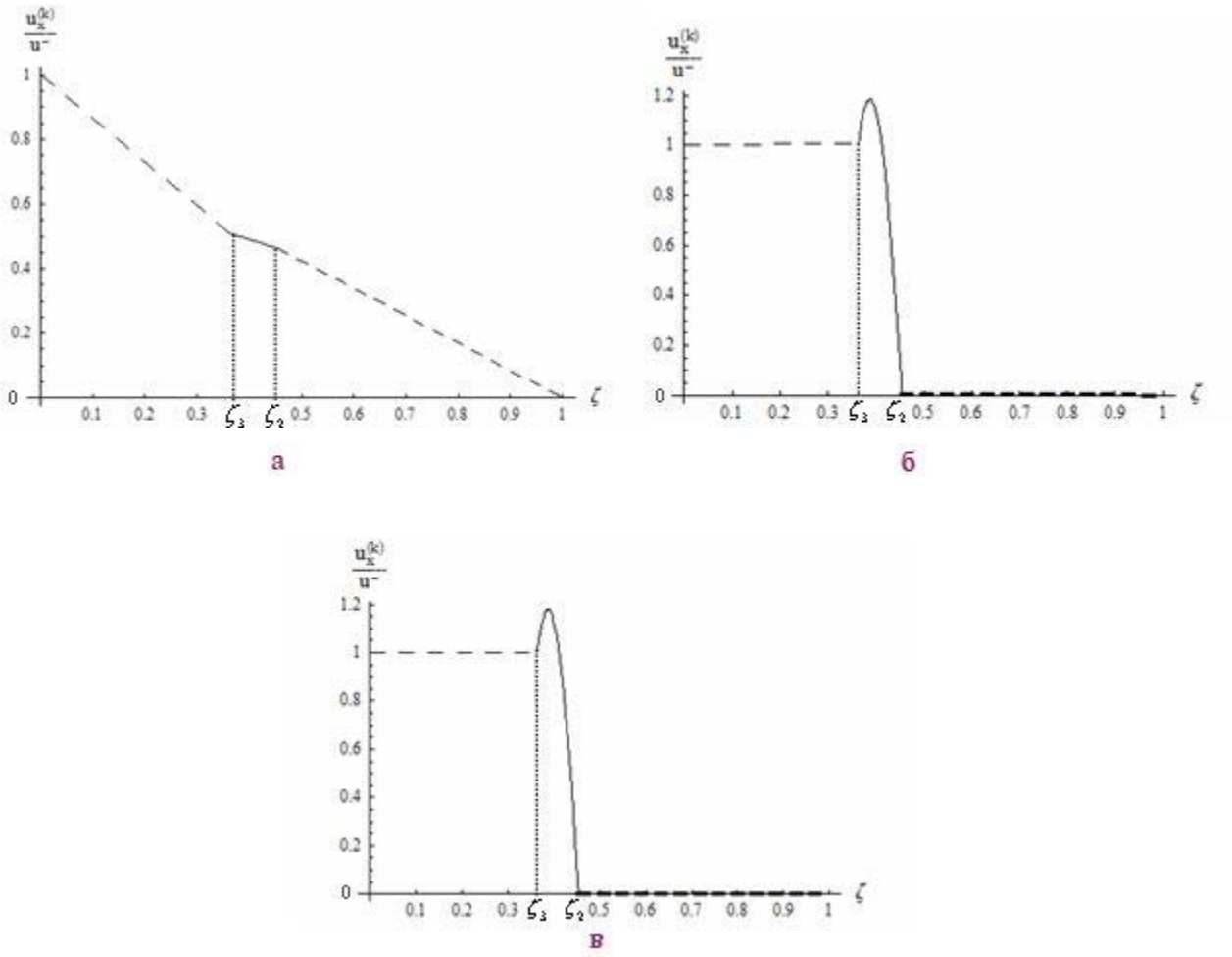


Рис.4

Как видно из графиков, в этом случае тоже амплитуды колебаний в верхнем слое уменьшаются при наличии среднего слоя из резины.

Работа выполнена при поддержке INTAS, grant Ref. No: 03-51-5547.

Институт механики НАН РА

Литература

1. *Агаловян Л. А.* В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд-во "Гитутюн" НАН РА. 2002. С. 9-19.

2. *Оганесян Р. Ж.* В сб.: Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести. Ереван. Изд-во "Гитутюн" НАН РА. 2006. С. 242-248.

3. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 415 с.

4. *Агаловян Л. А., Оганесян Р. Ж.* В сб.: V Междунар. конф. "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред." Ереван. Изд-во "Гитутюн" НАН РА. 2005. С. 14-22.

Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան, Ռ. Ժ. Հովհաննիսյան

Եռաշերտ օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումների բնույթը խառը եզրային խնդրում

Ուսումնասիրված են եռաշերտ օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումները, երբ ներքևի շերտի դիմային մակերևույթի վրա տրված է ըստ ժամանակի հարմոնիկ փոփոխվող տեղափոխման վեկտորը, իսկ շերտերի միջև տեղի ունեն լրիվ կոնտակտի պայմանները: Դիտարկված են այն դեպքերը, երբ վերին շերտի դիմային մակերևույթն ազատ է կամ կոշտ ամրակցված: Արտածված են բանաձևեր տատանումների ամպլիտուդները որոշելու համար: Կատարված է վերլուծություն եռաշերտ փաթեթի մի շարք տարբերակների համար: Ցույց է տրված, որ երբ երեք շերտերն էլ համեմատաբար կոշտ են, տատանման ամպլիտուդները շերտից շերտ դանդաղորեն աճում են, իսկ երբ միջին շերտը ավելի փափուկ նյութից է, օրինակ ռետինից, ամպլիտուդները երրորդ շերտում կտրուկ նվազում են: Կատարված են հաշվարկներ նաև կոշտ ամրակցման դեպքի համար, և ցույց է տրված, որ ռետինե միջին շերտի առկայությունը էապես նվազեցնում է տատանման ամպլիտուդները վերին շերտում: Ստացված արդյունքները հիմնավորում են սեյսմամեկուսիչների կիրառման անհրաժեշտությունը սեյսմակայուն շինարարությունում:

Academician L. A. Aghalovyan, R. Zh. Hovhannisyan

On the Character of Forced Vibrations of the Three-layered Orthotropic Plates in the Mixed-Boundary Problem

The object of study is the forced vibrations of the three-layered orthotropic plate, on the front face of the lower level of which the displacement vector is given which variates harmonically according to time. Between the layers there are conditions of full contact. All the cases when the front face of the upper layer is free or tightly fastened are observed. Formulae are developed to determine the amplitudes of vibrations. A numerical analysis is performed for a number of alternative versions of the three-layered packet. It is shown that when all the three layers are relatively inflexible, then the vibration amplitudes increase from layer to layer, but when the middle layer is smoother, e.g. it is made of rubber material, then the amplitudes abruptly decrease in the third layer. Calculations have been also done for the tough fastening case and it is shown, that the presence of the middle rubber layer significantly decreases the vibration amplitudes in the upper layer. These results prove the necessity of using seismic isolators in a seismic steady construction.