УДК 531.8

Р. М. Киракосян

# Влияние распределения касательных напряжений по толщине пластинки при наличии касательных поверхностных нагрузок

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 26/VII 2006)

Ключевые слова: *пластинка, ортотропия, поправочные коэффициенты, касательные напряжения, форма распределения*

Известно ([1]-[3] и др.), что если уточненная теория пластин строится на основе гипотез для перемещений, то с целью повышения точности вводятся поправочные коэффициенты $K_x, K_y$, учитывающие влияние форм распределения касательных напряжений $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ по толщине пластинки. Если же теория пластин опирается на гипотезы для касательных напряжений (например [4]), то законы распределения этих напряжений непосредственно участвуют в построении теории и необходимость введения поправочных коэффициентов автоматически отпадает.

В настоящей статье с использованием принципа виртуальных работ обобщаются выражения коэффициентов $K_x, K_y$ на случай действия произвольных нагрузок. Используя эти выражения и опираясь на гипотезы для перемещений, получены соотношения и уравнения ортотропных пластин, которые позволяют учитывать влияние форм распределения напряжений $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ и при наличии касательных поверхностных нагрузок. Приводятся примеры приложения. Полученные результаты сравниваются с соответствующими результатами теории [5], которая не учитывает влияния форм распределения напряжений $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ по толщине пластинки.

Литературу об истории развития различных теорий пластин и оболочек, а также многочисленные их приложения можно найти в монографиях [6]-[12] и др.

1. Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластинку постоянной толщины h. Координатную плоскость xoy совместим со срединной плоскостью пластинки, а ось oz направим вертикально вниз. Главные направления анизотропии материала параллельны координатным осям. Пластинка несет произвольные нагрузки. Проекции интенсивностей поверхностных нагрузок на оси ox, oy, oz обозначим $X^{\pm}$, $Y^{\pm}$, $Z^{\pm}$. Знаки "+" и "-" относятся к поверхностям $z = +h/2$ и $z = -h/2$ соответственно.

В качестве основополагающих гипотез примем:

а) перемещения по осям ox и oy, т.е. перемещения $u_x$ и $u_y$, являются линейными функциями поперечной координаты z;

б) перемещение $u_z$, нормальное к срединной плоскости, по толщине пластинки не меняется;

в) напряжение $\sigma_z$ пренебрежительно мало.

На основе этих допущений имеем:

$$u_x = u(x,y) + z\varphi(x,y),$$

$$u_y = v(x,y) + z\psi(x,y), \tag{1.1}$$

$$u_z = w(x,y)$$

Здесь $u, v, w, \varphi, \psi$ - искомые функции.

В силу (1.1) основные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ будут иметь линейное распределение по толщине пластинки. Тогда согласно дифференциальным уравнениям равновесия сплошной среды касательные напряжения $\tau_{xz}$ и $\tau_{yz}$ вдоль толщины пластинки будут изменяться по закону квадратной параболы. Имея в виду это обстоятельство, после удовлетворения условиям на поверхностях $z = \pm h/2$ получим:

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) - \frac{X_1}{2}\left(1 - \frac{12z^2}{h^2}\right) + \frac{z}{h}X_2,$$

$$\tag{1.2}$$

$$\tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) - \frac{Y_1}{2}\left(1 - \frac{12z^2}{h^2}\right) + \frac{z}{h}Y_2,$$

Здесь $Q_x, Q_y$ - поперечные силы,

$$X_1 = \frac{X^+ - X^-}{2}, \quad Y_1 = \frac{Y^+ - Y^-}{2}, \quad X_2 = X^+ + X^-, \quad Y_2 = Y^+ + Y^-. \tag{1.3}$$

С целью определения прогиба некоторой точки пластинки в этой точке по направлению искомого прогиба мысленно приложим единичную силу. Возникшие от этой силы касательные напряжения будут:

$$\tau_{xz}^{(1)} = \frac{3Q_x^{(1)}}{2h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right), \qquad \tau_{yz}^{(1)} = \frac{3Q_y^{(1)}}{2h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right). \tag{1.4}$$

Здесь $Q_x^{(1)}$ и $Q_y^{(1)}$ - поперечные силы, вызванные действием единичной силы.

Согласно принципу виртуальных работ, работа единичной силы на том перемещении данной точки пластинки, которое вызвано реально действую-щей нагрузкой, равна суммарной работе напряжений, соответствующих единичной силе, на действительных деформациях пластинки [2]. С целью определения вклада деформаций поперечных сдвигов рассмотрим работу только напряжений $\tau_{xz}^{(1)}$ и $\tau_{yz}^{(1)}$ на соответствующих реальных деформациях поперечных сдвигов $\gamma_{xz}$ и $\gamma_{yz}$. Учитывая, что

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{B_{55}}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{B_{44}}, \tag{1.5}$$

и имея в виду (1.2), (1.4), для поправки к классическому значению прогиба после интегрирования по толщине пластинки получим

$$\Delta w = \int_v \left(\tau_{xz}^{(1)} \cdot \gamma_{xz} + \tau_{yz}^{(1)} \cdot \gamma_{yz}\right) dv = \frac{1}{h} \int_s \left[K_x \frac{Q_x Q_x^{(1)}}{B_{55}} + K_y \frac{Q_y Q_y^{(1)}}{B_{44}}\right] ds. \tag{1.6}$$

Здесь $B_{55}$, $B_{44}$ - модули сдвига материала в плоскостях xoz,yoz [4] , v - объем пластинки, s - площадь ее срединной плоскости. Коэффициенты $K_x$ и $K_y$ имеют выражения:

$$K_x = \frac{6}{5} - \frac{X_1 h}{5Q_x}, \quad K_y = \frac{6}{5} - \frac{Y_1 h}{5Q_y}. \tag{1.7}$$

В выражениях (1.7) параметры нагрузок $X_2$ и $Y_2$ не фигурируют, поскольку относятся к плоской задаче, а не задаче изгиба пластинки. Если же не учитывать влияния форм распределения напряжений $\tau_{xz}$,$\tau_{yz}$ по толщине пластинки, т.е. вместо (1.2) использовать средние значения напряжений

$$\tau_{xz}^{cp} = \frac{Q_x}{h}, \quad \tau_{yz}^{cp} = \frac{Q_y}{h}, \tag{1.8}$$

то взамен (1.6) получится

$$\Delta w = \frac{1}{h} \int_s \left[\frac{Q_x Q_x^{(1)}}{B_{55}} + \frac{Q_y Q_y^{(1)}}{B_{44}}\right] ds. \tag{1.9}$$

Сравнивая (1.6) и (1.9), заключаем, что коэффициенты $K_x$ и $K_y$ учитывают влияние форм распределения напряжений $\tau_{xz}$,$\tau_{yz}$ по толщине пластинки. При отсутствии касательных поверхностных нагрузок $X_1 = Y_1 = 0$ и коэффициенты $K_x$,$K_y$ принимают постоянное по всей пластинке известное значение ''6/5'' ([1]-[3] и др.).

2. Значения приведенных деформаций поперечных сдвигов $\bar{\gamma}_{xz}$ и $\bar{\gamma}_{yz}$, одинаковых для всех точек данного сечения пластинки, определяются формулами

$$\bar{\gamma}_{xz} = K_x \frac{Q_x}{B_{55}h}, \quad \bar{\gamma}_{yz} = K_y \frac{Q_y}{B_{44}h}. \tag{2.1}$$

С другой стороны, в силу допущений (1.1) имеем:

$$\bar{\gamma}_{xz} = \varphi + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \bar{\gamma}_{yz} = \psi + \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{2.2}$$

Из (2.1) и (2.2) для поперечных сил находим:

$$Q_x = \frac{5}{6} B_{55}h\left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{X_1 h}{6}, \quad Q_y = \frac{5}{6} B_{44}h\left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{Y_1 h}{6}. \tag{2.3}$$

Соотношения (2.3) вместе с допущениями (1.1) позволяют получить уравнения пластин, способных учитывать влияние форм распределения касательных напряжений $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ по толщине пластинки и при отсутствии поперечных сил.

Пользуясь (1.1) и соотношениями обобщенного закона Гука, при пренебрежении напряжением $\sigma_z$, для основных напряжений, моментов и остальных усилий пластинки получим:

$$\sigma_x = B_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial v}{\partial y} + z\left(B_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right),$$

$$\sigma_y = B_{22}\frac{\partial v}{\partial y} + B_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + z\left(B_{22}\frac{\partial \psi}{\partial y} + B_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right), \tag{2.4}$$

$$\tau_{xy} = B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + zB_{66}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right),$$

$$T_x = C_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + C_{12}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad T_y = C_{22}\frac{\partial v}{\partial y} + C_{12}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad S = C_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{2.5}$$

$$M_x = D_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad M_y = D_{22}\frac{\partial \psi}{\partial y} + D_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad M_{xy} = D_{66}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right). \tag{2.6}$$

Здесь, как обычно [4],

$$C_{ij} = B_{ij}h, \quad D_{ij} = \frac{B_{ij}h^3}{12}, \tag{2.7}$$

$B_{ij}$ - постоянные материала.

Уравнения равновесия дифференциального элемента срединной плоскости пластинки имеют вид [4]:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}=-X_2,\qquad \frac{\partial T_y}{\partial y}+\frac{\partial S}{\partial x}=-Y_2,$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=-Z_2,\qquad \frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=Q_x-hX_1,\tag{2.8}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=Q_y-hY_1,$$

где

$$Z_2=Z^{+}+Z^{-}.\tag{2.9}$$

Подставляя выражения усилий и моментов в (2.8), приходим к следующим системам уравнений:

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(C_{12}+C_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+C_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-X_2,$$

$$C_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(C_{12}+C_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-Y_2,\tag{2.10}$$

$$B_{55}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+B_{44}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=-\frac{6Z_2}{5h}-\frac{1}{5}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}+\frac{\partial Y_1}{\partial y}\right),$$

$$D_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+D_{66}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{5}{6}B_{55}h\left(\varphi+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=-\frac{5X_1h}{6},\tag{2.11}$$

$$D_{22}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+D_{66}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{5}{6}B_{44}h\left(\psi+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=-\frac{5Y_1h}{6}.$$

Система уравнений (2.10) относится к плоской задаче, а (2.11) - к задаче изгиба пластинки. Первая система имеет четвертый, а вторая - шестой порядок. В соответствии с этим на каждом краю пластинки следует ставить по пять краевых условий: по два условия для плоской задачи и по три - для задачи изгиба. Плоская задача и задача изгиба пластинки разделяются друг от друга и можно решить их в отдельности.

Приведем некоторые, наиболее часто встречающиеся условия для краев x = const.

а) Условия свободного края:

$$C_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{12}\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad (T_x=0), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad (S=0), \tag{2.12}$$

$$D_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+D_{12}\frac{\partial \psi}{\partial y}=0 \quad (M_x=0),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial x}=0 \quad (M_{xy}=0), \tag{2.13}$$

$$5B_{55}\left(\varphi+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+X_1=0 \quad (Q_x=0).$$

б) Условия свободного шарнирного опирания: первые четыре условия совпадают с соответствующими условиями свободного края. Взамен последнего условия (2.13) следует брать

$$w=0. \tag{2.14}$$

в) Условия заделанного края:

$$u=0, \quad \varphi=0 \quad (u_x=0),$$

$$v=0, \quad \psi=0 \quad (u_y=0), \tag{2.15}$$

$$w=0 \quad (u_z=0).$$

Возможны и другие условия. Аналогичным образом можно написать условия и для краев y = const.

3. В приведенной таблице представлены решения трех задач для пластинки - полосы, полученные на основе уравнений (2.11) и по теории [5] при действии только касательных поверхностных нагрузок. Результаты, соответствующие уравнениям (2.11), снабжены индексом "1", а теории [5] - индексом "2". Отметим, что теория [5] не учитывает влияния форм распределения касательных напряжений $\tau_{xz}$, $\tau_{yz}$ по толщине пластинки. Она фактически учитывает влияние средних значений этих напряжений. Поэтому в случаях отсутствия поперечных сил, когда средние значения напряжений $\tau_{xz}$, $\tau_{yz}$, а следовательно, и средние значения соответствующих деформаций поперечных сдвигов равны нулю, теория [5] поправки не дает и ее результаты совпадают с соответствующими результатами теории Кирхгофа. Такая ситуация имеет место в первых двух рассмотренных задачах. Уравнения же

(2.11) в этих случаях дают определенные поправки. Например, для полос из углепластика [4] при

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{5}, \quad \frac{B_{11}}{B_{55}} = 40 \qquad (3.1)$$

поправка к значению наибольшего прогиба по уравнениям (2.11) составляет:

в первой задаче $\Delta_1 = 0.08$,

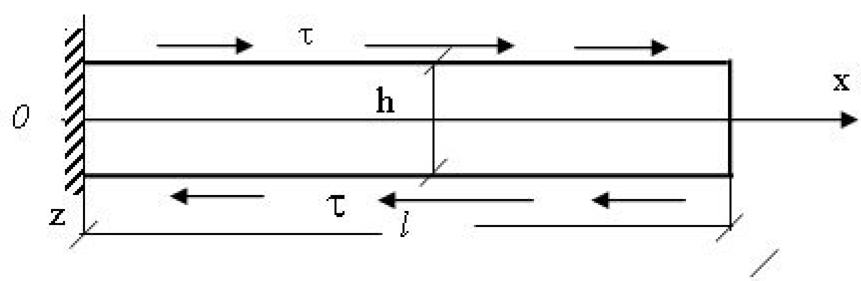
во второй задаче $\Delta_1 = 0.32$.

В третьей задаче уравнения (2.11) и теория [5] приводят к качественно подобным результатам. Они отличаются лишь количественно. Значения прогибов по теории [5] получаются больше -

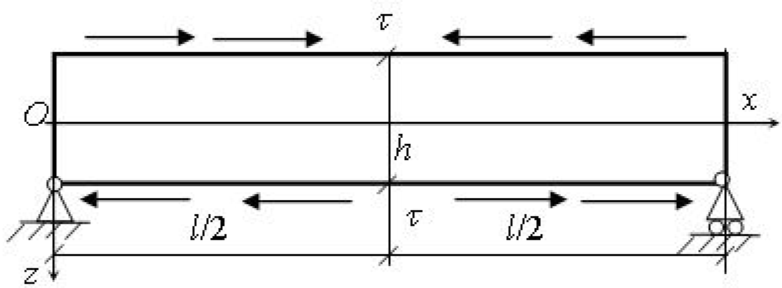
$$\frac{w_2}{w_1} = 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{B_{55}}{B_{11}} \cdot \frac{l^2}{h^2}}. \qquad (3.2)$$

При (3.1) это отношение составляет 1.123. Когда $B_{55} \to \infty$, решения по обоим способам стремятся к решению по теории Кирхгофа:

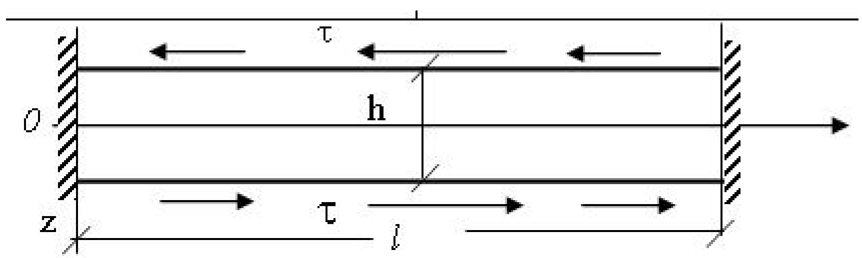
$$Q = \tau h, \quad M_x \equiv 0, \quad W \equiv 0. \qquad (3.3)$$




| по уравнениям (2.11) | по теории [5] |
|---|---|
| $W_1 = [(\tau h)/(6D_{11})]x^2(3l-x)+[(\tau x)/(6B_{55})]$ | $W_2 = [(\tau h)/(6D_{11})]x^2(3l-x)$ |
| $W_1^{max} = [(\tau h l^3)/(3D_{11})](1+[1/20][(B_{11})/(B_{55})]\cdot[(h^2)/(l^2)])$, $\Delta_1 = [1/20][(B_{11})/(B_{55})]\cdot[(h^2)/(l^2)]$ | $W_2^{max} = [(\tau h l^3)/(3D_{11})]$, $\Delta_2 = 0$ |




| по уравнениям (2.11) | по теории [5] |
|---|---|
| $W_1 = [(\tau h)/(24D_{11})]x(3l^2-4x^2)+[(\tau x)/(5B_{55})],\ 0 \le x \le l/2$ | $W_2 = [(\tau h)/(24D_{11})]x(3l^2-4x^2),\ 0 \le x \le l/2$ |
| $W_1 = [(\tau h(l-x))/(24D_{11})](8lx-4x^2-l^2)+[(\tau(l-x))/(5B_{55})]$ | $W_2 = [(\tau h(l-x))/(24D_{11})](8lx-4x^2-l^2),$ |
| $l/2 \le x \le l$ | $l/2 \le x \le l$ |
| $W_1^{max} = [(\tau h l^3)/(24D_{11})](1+[1/5][(B_{11})/(B_{55})]\cdot[(h^2)/(l^2)]),\ \Delta_1 = [1/5][(B_{11})/(B_{55})]\cdot[(h^2)/(l^2)]$ | $W_2^{max} = [(\tau h l^3)/(24D_{11})],\quad \Delta_2 = 0$ |




| по уравнениям (2.11) | по теории [5] |
|---|---|
| $W_1 = [(5\tau hx(l^2-3lx+2x^2))/(72D_{11}+5B_{55}hl^2)]$ | $W_2 = [(\tau hx(l^2-3lx+2x^2))/(12D_{11}+B_{55}hl^2)]$ |
| $W_1^{max} = \lvert W_1\rvert,\quad (x = [l/2](1 \mp [(\sqrt{3})/3]))$ | $W_2^{max} = \lvert W_2\rvert,\quad (x = [l/2](1 \mp [(\sqrt{3})/3]))$ |
| $Q_1 = \tau h[(12D_{11}+5B_{55}hl^2)/(72D_{11}+5B_{55}hl^2)]$ | $Q_2 = \tau h[(B_{55}hl^2)/(12D_{11}+B_{55}hl^2)]$ |
| $M_1 = [(30\tau hD_{11}(l-2x))/(72D_{11}+5B_{55}hl^2)]$ | $M_2 = [(6D_{11}\tau h(l-2x))/(12D_{11}+B_{55}hl^2)]$ |

Институт механики НАН РА

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

## Սալի հաստությամբ շոշափող լարումների բաշխման ազդեցությունը մակերևութային շոշափող բեռների առկայության դեպքում

Օգտվելով վիրտուալ աշխատանքների սկզբունքից՝ տեղափոխությունների վարկածների հիման վրա ստացվում են հաստատուն հաստության օրթոտրոպ սալերի առնչություններն ու հավասարումները, որոնք հաշվի են առնում սալի հաստությամբ $\tau_{xz}$ և $\tau_{yz}$ շոշափող լարումների բաշխման ձևի ազդեցությունը մակերևութային շոշափող բեռների առկայության դեպքում:

**R. M. Kirakosyan**

## The Influense of Tangential Strains Distribution Along Plates Thickness in the Case of Existence Tangential Surfase Loading

The correlations and equations of constantly thickness orthotropic plates are obtained using virtual work principal and based on displacement hypotheses. The influense of tangential strains distribution along plates thickness is taken into account in the case of existence tangential surface loading.

## Литература


1. *Reissner E. T* - Trans. ASME. 1945. V. 67. P. A69-A77.
2. *Тимошенко С. П., Гере Дж.* Механика материалов. М. Мир. 1976. 669 с.
3. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Теория оболочек переменной жесткости. Киев. Наукова думка. 1981. 544 с.
4. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
5. *Васильев В. В.* - Изв. АН МТТ. 1998. №3. С. 46-58.
6. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.
7. *Лурье А. И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. М. Гостехиздат. 1947. 251с.
8. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М. Гостехиздат. 1957. 463 с.
9. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л. Судпромгиз. 1962. 431 с.
10. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М. Физматгиз. 1963. 635 с.
11. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев. Наукова думка. 1973. 248 с.
12. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М. Наука. 1976. 510 с.