

УДК 517.55

А. И. Петросян

О множествах пика и интерполяции гладких функций в полидиске

(Представлено академиком Н. У. Аракеляном 7/VII 2006)

Ключевые слова: полидиск, пик, интерполяция, гладкие функции

1. Работа посвящена исследованию множеств пика и тесно связанных с ними множеств интерполяции для алгебр $A^{m,\alpha}(U^n)$. Приведем необходимые определения. Пусть

$U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| < 1, i = 1, \dots, n\}$ - единичный полидиск в

пространстве $\mathbb{C}^n$;

$T^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i| = 1, i = 1, \dots, n\}$ - его остов.

Для заданного целого числа $m, m \geq 0$, и $\alpha \in (0,1]$ обозначим через $A^m(U^n)$ алгебру функций, голоморфных в U^n , производные которых порядка m непрерывно продолжаются на замыкание $\bar{U}^n$, и через $A^{m,\alpha}(U^n)$ - подалгебру $A^m(U^n)$, состоящую из функций, у которых производные порядка m удовлетворяют в U^n условию Гёльдера порядка α . Аналогично обозначаются подалгебры $C^m(T^n)$ и $C^{m,\alpha}(T^n)$ алгебры $C(T^n)$ функций, непрерывных на остоле T^n .

Компактное подмножество K остола называется *множеством пика* для $A^m(U^n)$ или $A^{m,\alpha}(U^n)$, если существует функция $f \in A^{m,\alpha}(U^n)$ (соответственно, $f \in A^m(U^n)$) такая, что $f = 1$ на K и $|f(z)| < 1$ для всех $z \in \bar{U}^n \setminus K$.

Это условие можно задать в эквивалентной форме: существует функция f такая, что

$$f(z) = 0, \text{ при } z \in K, \text{ и } \operatorname{Re} f(z) > 0 \text{ при } z \in \bar{U}^n \setminus K. \quad (1)$$

Компакт K называется *интерполяционным множеством* для $A^m(U^n)$ или $A^{m,\alpha}(U^n)$, если для каждой функции f из $C^p(T^n)$ (соответственно, $C^{p,\alpha}(T^n)$) существует $F \in A^m(U^n)$ ($F \in A^{m,\alpha}(U^n)$), которая равна f на K .

2. Задаче описания множеств пика и интерполяции для различных функциональных алгебр посвящено немало работ. Наиболее полно исследован случай полидиск-алгебры $A(U^n) = A^0(U^n)$. Хорошо известно (см. например [1]), что множества пика и интерполяции $K \subset T^n$ характеризуются тем, что *вариация любой ортогональной меры на них равна нулю*, т. е. условие $|\mu(K)| = 0$ выполняется для всякой борелевской меры μ на T^n такой, что $\mu \perp A(U^n)$. Согласно классической теореме М. и Ф. Риссов, всякая мера, ортогональная к диск-алгебре A

(U), абсолютно непрерывна. Поэтому в одномерном случае (т. е. $n = 1$) множества пика и интерполяции для $A(U)$ суть замкнутые подмножества окружности лебеговой меры нуль.

Для алгебр гладких функций (т. е. при $m \geq 1$) дело обстоит иначе. Уже в одномерном случае множества пика и интерполяции не совпадают: множества пика конечны, (см. [2]), а интерполяционные множества могут быть и бесконечными и определяются условием, которое дано в [3].

Многомерный случай исследован меньше. Для формулировки результатов нам нужно следующее понятие.

Определение. Гладкое подмногообразие M остова T^n называется *интерполяционным многообразием*, если в каждой точке $q \in M$ касательное пространство $T_q(M)$ пересекается с замкнутым положительным конусом C_q на $T_q(T^n)$, образованным касательными векторами

$$\partial/\partial\theta_1|_q, \dots, \partial/\partial\theta_n|_q, \quad \theta_i = \arg z_i.$$

только в начале координат.

Отметим, что, очевидно, размерность M не превосходит $n - 1$.

3. В работах [4] и [5] доказано следующее необходимое условие: *если K является множеством пика для $A^m(U^n)$, $m \geq 1$, то в некоторой окрестности множества K существует интерполяционное многообразие M гладкости C^m такое, что $K \subset M$* . Интересно отметить, что этот результат неулучшаем в том смысле, что в общем случае не существует замкнутого подмногообразия M остова с перечисленными свойствами. В статье приведен соответствующий пример.

В [4] исследована также достаточность этого условия и доказано, что *всякое компактное подмножество интерполяционного многообразия класса C^m является множеством пика для $A^{m-4}(U^n)$* . В теореме 1 этот результат усиливается.

Теорема 1. *Всякое компактное подмножество интерполяционного подмногообразия класса $C^{m,\alpha}$, $m \geq 3$, на остова полидиска U^n является множеством пика для $A^{m-1,\alpha}(U^n)$.*

Доказательство теоремы 1 основано на конструкции так называемой "почти аналитической" функции пика (теорема 2), а также на оценке роста производных решения соответствующего $\bar{\partial}$ -уравнения при подходе к особенностям правой части (лемма 2). При этом достаточно ограничиться компактными подмножествами интерполяционного подмногообразия, имеющего максимально возможную размерность, т. е. $n - 1$. Это следует из следующей леммы:

Лемма 1. *Пусть M - интерполяционное $C^{m,\alpha}$ -гладкое подмногообразие остова T^n , имеющее размерность k , $k \leq n - 1$. Тогда на T^n существует $(n - 1)$ -мерное интерполяционное подмногообразие $\tilde{M}$ той же гладкости и такое, что $M \subset \tilde{M}$.*

Теорема 2. *Пусть M - интерполяционное подмногообразие размерности $n - 1$ остова полидиска класса $C^{m,\alpha}$, $m \geq 3$, K - компакт на M . Тогда в некоторой окрестности Ω этого компакта существуют функция $F \in C^{m,\alpha}(\Omega)$ и константа $\gamma > 0$ такие, что*

- a) $F(z) = 0$ тогда и только тогда, когда $z \in K$;
- b) $\operatorname{Re} F(z) \geq \gamma d(z, M)^2$ ($z \in \bar{U}^n \cap \Omega$), где $d(z, M)$ - расстояние между z и M ;
- c) $\bar{\partial}F = O[d(z, M)]^{m-1+\alpha}$;
- d) $|F(z)| \geq \gamma d(z, M)$ ($z \in \bar{U}^n \cap \Omega$).

Доказательство. Пусть D - строго псевдовыпуклая область с границей класса $C^{m,\alpha}$, в которую полидиск U^n вложен следующим образом:

- 1° $\bar{U}^n \setminus T^n \subset D$,
- 2° $T^n \subset \partial D$,
- 3° $T_z(M) \subset T_z^c(\partial D)$ для всех $z \in M$

где $T_z^c(\partial D)$ - комплексная гиперплоскость, содержащаяся в $T_z(\partial D)$. Условие 3° означает, что M является комплексно-касательным подмногообразием ∂D . Способ построения такой области D изложен в [6].

Далее, в работе [7] (см. также [8]) доказано, что в некоторой окрестности Ω компакта K существует "почти аналитическая" функция пика F , удовлетворяющая условиям а) и б) для области D , и, следовательно, для вложенного в D полидиска U^n . Кроме этого, $\bar{\partial}F = 0$ на $\Omega \cap M$ вместе со всеми производными порядка до $m - 1$ включительно. Поскольку $\bar{\partial}F \in C^{m-1,\alpha}(\Omega)$, то $\bar{\partial}F(z) = O[d(z, M)]^{m-1+\alpha}$, т. е. имеет место с).

Отметим, что $F = u + iv$ обладает также следующим свойством:

$$\operatorname{grad} u(z) = -\frac{\chi_z}{\|\chi_z\|^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{grad} v(z) = -\frac{\tau_z}{\|\tau_z\|^2}, \quad (2)$$

где χ_z - вещественная нормаль в точке z к границе области D , $\tau_z = J\chi_z$, а J - оператор в $\mathbb{R}^{2n}$, который соответствует умножению на мнимую единицу i в пространстве $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

Чтобы доказать свойство d), достаточно показать, что для любой точки $z \in M$ вдоль направления, касательного к остову и ортогонального к $T_z(M)$, производная функции F отлична от нуля.

В самом деле, из условия $M \subset \partial D$ следует, что $T_z(M) \perp \chi_z$. Так как M имеет комплексно-касательное направление на ∂D , то $JT_z(M) \subset T_z^c(\partial D)$, поэтому $JT_z(M) \perp \chi_z$, или, что то же, $T_z(M) \perp \tau_z$. Очевидно,

$$T_z(T^n) \perp JT_z(T^n) \quad \text{и} \quad T_z(T^n) \oplus JT_z(T^n) = \mathbf{R}^{2n}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что $T_z(M) \perp JT_z(M)$ и размерность $T_z(M) \oplus JT_z(M)$ составляет $2n - 2$. Таким образом, $T_z(M) \oplus JT_z(M)$ является ортогональным дополнением в $\mathbf{R}^{2n}$ комплексной нормали $N_z^c = \mathbf{R}[\chi_z] \oplus \mathbf{R}[\tau_z]$ к ∂D в точке z .

Пусть вектор ξ касателен к остову в точке z , т. е. $\xi \in T_z(T^n)$, и ортогонален к $T_z(M)$. Из (3) следует, что ξ ортогонален также и к $T_z(M) \oplus JT_z(M)$, поэтому $\xi \in N_z^c$. С другой стороны, $\xi \perp \tau_z$, откуда следует, что вектор ξ параллелен τ_z . Так как согласно (2) τ_z направлен вдоль градиента v , то $\xi v \neq 0$, следовательно, $\xi F \neq 0$, т. е. вдоль направления ξ производная F отлична от нуля.

Замечание. Обратим внимание на то, что в неравенстве d) $d(z, M)$ участвует в первой, а не во второй степени, как это имеет место в случае строго псевдовыпуклой области. Это улучшение оценки является следствием того, что в отличие от границы строго псевдовыпуклой области остов полидиска не имеет комплексных касательных векторов.

Пусть K - компактное подмножество интерполяционного многообразия M , окрестность Ω и функция F удовлетворяют заключению теоремы 2. Пусть, далее, λ - вещественная функция класса C^∞ с носителем внутри Ω такая, что $0 \leq \lambda \leq 1$ и $\lambda = 1$ в некоторой окрестности множества K . Определим $(0,1)$ -форму g на $\bar{U}^n \setminus K$

$$g = \begin{cases} \bar{\partial} \left(\lambda \frac{1}{F} \right), & \text{в } \Omega \\ 0, & \text{вне } \Omega. \end{cases}$$

Лемма 2. В области U^n уравнение $\bar{\partial}u = g$ имеет решение $u(z)$, бесконечно дифференцируемое на множестве $\bar{U}^n \setminus M$ и удовлетворяющее условиям:

$$1^\circ \quad \partial^{|p|} u(z) / \partial z_1^{p_1} \dots \partial z_n^{p_n} \text{ ограничена в } U^n \text{ при } 0 \leq |p| \leq m - 3;$$

$$2^\circ \quad \partial^{|p|} u(z) / \partial z_1^{p_1} \dots \partial z_n^{p_n} = O[d(z, M)]^{m-3-|p|+\alpha} \text{ при } m - 2 \leq |p| \leq m.$$

При доказательстве использованы формулы из [9] для решения $\bar{\partial}$ -уравнения в полидиске, а также рекуррентные формулы для производных, полученные в [10].

Доказательство теоремы 1. Пусть компакт $K \subset M$. В силу леммы 1 можно считать, что M имеет размерность $n - 1$. Пусть, далее, функции $F(z)$ и $u(z)$ те же, что в теореме 2 и лемме 2. Рассмотрим функцию

$$v(z) = \frac{\lambda(z)}{F(z)} - u(z).$$

Имеем $\bar{\partial}v = \bar{\partial}\frac{\lambda}{F} - \bar{\partial}u = g - \bar{\partial}u = 0$, т. е. $v(z)$ голоморфна в области U^n .
Далее,

$$\operatorname{Re} v = \lambda \frac{\operatorname{Re} F}{|f|^2} - \operatorname{Re} u. \quad (4)$$

Согласно лемме 2, функция $u(z)$ ограничена на $\bar{U}^n$. Поэтому с учетом пункта б) теоремы 2 из (4) имеем

$$\operatorname{Re} v(z) \geq -\max_{z \in \bar{U}^n} \operatorname{Re} u(z) > -\infty.$$

Добавив в случае необходимости к функции $u(z)$ соответствующую константу, можно считать, что

$$\operatorname{Re} v(z) > 0 \quad \text{при} \quad z \in \bar{U}^n \setminus K. \quad (5)$$

Покажем, что функция

$$f(z) = \frac{1}{v(z)} = \frac{F(z)}{\lambda(z) - u(z)F(z)} \quad (6)$$

является искомой функцией пика. Прежде всего $f(z)$ голоморфна в U^n и, как следует из (5) и (6), $\operatorname{Re} f(z) > 0$ при $z \in \bar{U}^n \setminus K$. Далее, нули $f(z)$ совпадают с нулями $F(z)$, т.е. ввиду пункта а) теоремы 2, с множеством K . Таким образом, f удовлетворяет условиям (1). Остается проверить, что $f \in A^{m-1, \alpha}(U^n)$. В силу теоремы Харди-Литтлвуда достаточно показать, что $D^j f(z) = O[d(z, M)]^{\alpha-1}$ для любого целочисленного вектора j такого, что $|j| = m$. Функция f на множестве $\bar{U}^n \setminus K$ бесконечно дифференцируема, поэтому достаточно рассмотреть ее лишь в окрестности множества K , где имеем

$$f(z) = \frac{F(z)}{1 - u(z)F(z)}.$$

Выражение для $D^j f$ содержит производные $D^p u$, $|p| = 0, 1, \dots, m$. Согласно лемме 2 при $0 \leq |p| \leq m - 3$ они ограничены, а при $|p| = m - 2$ имеют порядок роста $O[d(z, M)]^{\alpha-1}$. С другой стороны, согласно той же лемме, производные $D^p u$ порядка $|p| = m - 1$ и $|p| = m$ при подходе к M имеют больший порядок роста, а именно, $O[d(z, M)]^{\alpha-2}$ и $O[d(z, M)]^{\alpha-3}$ соответственно. Нетрудно

убедиться в том, что слагаемые в выражении $D^j f$, которые содержат эти производные, имеют соответствующие сомножители F и F^2 , которые "гасят" излишний рост, поэтому согласно пункту d) теоремы 2 указанные слагаемые также имеют порядок роста $O[d(z, M)]^{\alpha-1}$.

Следствие. *Всякое компактное подмножество интерполяционного подмногообразия класса C^m , $m \geq 4$, на остоле полидиска U^n является множеством пика для $A^{m-2,1}(U^n)$.*

Далее доказана следующая интерполяционная

Теорема 3. *Пусть $m \geq 3$, $\alpha \in (0,1)$ и пусть K - компактное подмножество интерполяционного подмногообразия гладкости $C^{m,\alpha}$ на остоле T^n полидиска U^n . Тогда*

- а) *для заданной $f \in C^m(T^n)$ существует функция $F \in A^{m-1,\alpha}(U^n)$ такая, что $F|_K = f|_K$,*
- б) *для заданной $f \in C^{m-1,\alpha}(T^n)$ существует функция $F \in A_n^{m-1,\alpha}(U^n)$ такая, что $F|_K = f|_K$.*

В утверждении (б) под $A_n^{m-1,\alpha}$ подразумевается подмножество функций из A^{m-1} , у которых все производные порядка $m-1$ допускают модуль непрерывности $\gamma \delta^\alpha (\log[1/(\delta)])^{k-1}$, где γ - некоторая константа. Таким образом, например, $A_1^{m-1,\alpha} = A^{m-1,\alpha}$.

Ереванский государственный университет
Институт математики НАН РА

Литература

1. Рудин У. Теория функций в поликруге. М. Мир. 1974. 160 с.
2. Taylor B. A., Williams D. L. - Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 24. P. 604-606.
3. Alexander H., Taylor B. A., Williams D. L. - J. Math. Anal. Appl. 1971. V. 36. N3. P. 556-566.
4. Saerens R., Stout E. L. - Preprint. University of Washington. Seattle. Wash. 1984.
5. Saerens R. - Ann. Scuola Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 1984. V. 11. N4. P. 177-211.
6. Tumanov A. E., Henkin G. M. - Amer. Math. Soc. Transl. 1980. V. 115. N2. P. 74-86.
7. Chaumat J., Chollet A. M. - Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 1979. V. 29. N3. P. 171-200.
8. Владимиров В. С., Сергеев А. Г. - Итоги науки и техники. 1985. Т. 8. С. 191-266.
9. Charpentier P. - Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1980. V. 30. N4. P. 121-154.
10. Петросян А. И. - Изв. АН Армении. Математика. 1991. Т. 26. N2. С. 99-107.

Ա. Ի. Պետրոսյան

**Բազմաշրջանում ողորկ ֆունկցիաների հանրահաշիվների պիկի և միջարկման
բազմությունների մասին**

Ապացուցված է, որ $C^{m,\alpha}$ ողորկություն ունեցող ինտերպոլյացիոն բազմաձևության ամեն մի K կոմպակտ ենթաբազմություն պիկի բազմություն է $A^{m-1,\alpha}(\mathbf{U}^n)$ -ի համար: Բացի դրանից, ստացվել է հետևյալ արդյունքը. ամեն մի $f \in C^m(\mathbf{T}^n)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $F \in A^{m-1,\alpha}(\mathbf{U}^n)$ այնպիսին, որ $F|_K = f|_K$: Իսկ եթե f -ը պատկանում է $C^{m-1,\alpha}(\mathbf{T}^n)$ -ին, ապա միջարկող F ֆունկցիան կարելի է ընտրել $A_n^{m-1,\alpha}(\mathbf{U}^n)$ -ից:

A. I. Petrosyan

On Peak and Interpolation Sets of Algebras of Smooth Functions in the Polydisk

It is proved, that any compact subset K of an interpolation $C^{m,\alpha}$ -smooth manifold on the distinguished boundary of unit polydisc $\mathbf{U}^n$ is a peak set for the algebra of smooth functions $A^{m-1,\alpha}(\mathbf{U}^n)$. Besides, the following interpolation result is obtained: For given $f \in C^m(\mathbf{T}^n)$ there is $F \in A^{m-1,\alpha}(\mathbf{U}^n)$ with $F|_K = f|_K$. If given f belongs to $C^{m-1,\alpha}(\mathbf{T}^n)$, then the interpolating function F can be chosen from $A_n^{m-1,\alpha}(\mathbf{U}^n)$.